BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVES D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : 4 h 00

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8 avec 4 exercices indépendants.

Le candidat traite les 4 exercices.

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des explications entreront dans l'appréciation des copies.

EXERCICE I – (5 points)

Le comité de surveillance d'un centre hospitalier enquête sur les infections susceptibles d'être contractées par un patient au cours d'un séjour dans leur établissement. Le service dans lequel se trouve le patient a une influence sur le risque d'infection.

Il a obtenu les résultats suivants :

- 69 % des patients hospitalisés étaient dans le service de médecine et 6,8 % d'entre eux ont été atteints d'une infection.
- 26 % des patients hospitalisés étaient dans le service de chirurgie et 7,5 % d'entre eux ont été atteints d'une infection.
- Le reste des patients hospitalisés était dans le service de réanimation. Parmi eux, 24 % ont été atteints d'une infection.

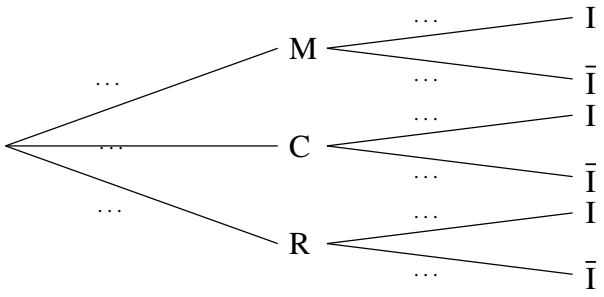
PARTIE A

On choisit au hasard un patient de ce centre hospitalier. On définit les événements suivants :

- M : « Le patient est hospitalisé dans le service de médecine »
- C : « Le patient est hospitalisé dans le service de chirurgie »
- R : « Le patient est hospitalisé dans le service de réanimation »
- I : « Le patient est atteint par une infection »

On note $\overline{S}$ l'événement contraire de l'événement S.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation de l'énoncé.



2. Montrer que la probabilité que le patient soit atteint d'une infection est égale à 0,07842.

3. On interroge au hasard un patient de ce centre hospitalier parmi les personnes qui n'ont pas contracté une infection. Déterminer la probabilité qu'il soit hospitalisé dans le service de réanimation. En donner une valeur arrondie au millième.

PARTIE B

On suppose dans cette partie que la probabilité qu'un patient hospitalisé soit atteint par une infection est $p = 0{,}078$.

Soit n un entier naturel non nul. On appelle X_n la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de n patients hospitalisés, donne le nombre d'entre eux atteints par une infection.

Le nombre de patients est suffisamment important pour assimiler le choix d'un échantillon de n patients à un tirage avec remise.

1. Justifier que la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. On note p_n la probabilité que dans un échantillon de n patients, il y ait au moins un patient atteint d'une infection.

a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n.

b. Déterminer, en justifiant, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que la probabilité p_n est supérieure ou égale à 0,99.

3. On s'intéresse à la variable aléatoire R_n égale à la proportion de patients atteints par une infection dans un échantillon de n personnes, où n désigne un entier naturel strictement positif.
On a donc $R_n = \dfrac{X_n}{n}$.
On note $E(R_n)$ l'espérance et $V(R_n)$ la variance de la variable aléatoire R_n.

a. Justifier que $E(R_n) = 0{,}078$.

b. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

c. On admet que $V(R_n) = \dfrac{0{,}071916}{n}$.
Montrer que : $P\left(|R_n - 0{,}078| \geqslant 0{,}1\right) \leqslant \dfrac{7{,}2}{n}$.

d. Un laboratoire effectue des prélèvements sur un échantillon de 500 patients hospitalisés dans ce centre. 20 % de ces prélèvements indiquent la présence d'une infection. En exploitant l'inégalité précédente, justifier que cette situation peut être considérée comme exceptionnelle.

EXERCICE II – (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère les points $A(3\,;-2\,;2)$, $B(6\,;1\,;5)$ et $C(6\,;-2\,;-1)$.

PARTIE A :

1. Justifier que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Soit P le plan d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$.
   Montrer que A est un point du plan P.

On admet que ce plan est orthogonal à la droite (AB).

3. Soit P' le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par A.
   Donner une équation cartésienne de P'.
4. Soit (Δ) la droite d'intersection des deux plans P et P'.
   Justifier qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 2 \\ z = t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

PARTIE B :

Soit D le point de coordonnées $(0\,;4\,;-1)$.

1. Montrer que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC).
2. Calculer le volume de la pyramide ABCD.
   On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'une pyramide est donné par $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base.
3. En calculant de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$, montrer que :

$$\widehat{\text{BDC}} = \frac{\pi}{4}$$

4. Justifier que l'aire du triangle BDC est égale à 27.
5. En déduire la distance du point A au plan (BCD).

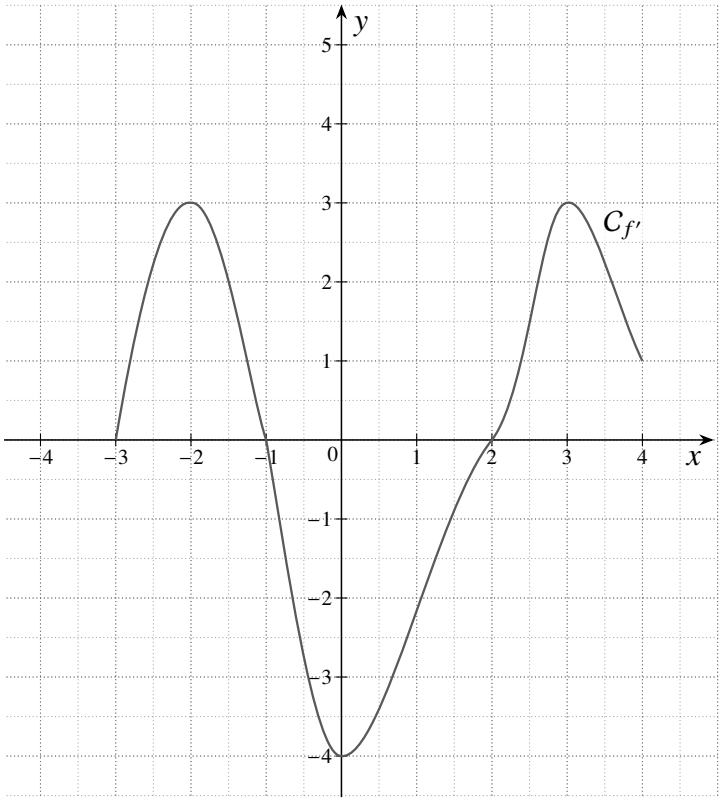
EXERCICE III – (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

1. On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé du plan, la courbe représentative de la fonction dérivée f' d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\,;4]$.



Par lecture graphique, déterminer l'affirmation correcte pour la fonction f :

- **a.** La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-2\,;-1]$
- **b.** La fonction f est concave sur l'intervalle $[-1\,;2]$
- **c.** La fonction f est concave sur l'intervalle $[-2\,;0]$
- **d.** La fonction f admet exactement deux points d'inflexion sur l'intervalle $[-3\,;4]$

2. Une école de rugby compte 20 joueurs. Les matchs auxquels peut participer cette école se jouent à 10. Combien d'équipes différentes cette école peut-elle former ?

- **a.** $\binom{20}{10}$
- **b.** 20^{10}
- **c.** $20 \times 19 \times 18 \times \cdots \times 11$
- **d.** 10^{20}

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n + 3$.

La fonction Python suivante, dont la ligne 4 est incomplète, doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier n tel que $u_n \geqslant 100$.

```
1  def suite() :
2      u=1
3      n=0
4      while .......... :
5          u=1.5*u+3
6          n=n+1
7      return n
```

La ligne 4 doit être complétée par :

a. `u<=100`
b. `u>=100`
c. `u<100`
d. `n<=100`

4. La solution de l'équation différentielle $y' + 3y = \dfrac{9}{2}$ qui vérifie $f(1) = 0$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f(x) = \dfrac{3}{2}$

b. $f(x) = e^{-3x} + \dfrac{3}{2}$

c. $f(x) = \dfrac{3}{2}\,e^{3(1-x)} - \dfrac{3}{2}$

d. $f(x) = -\dfrac{3}{2}\,e^{3(1-x)} + \dfrac{3}{2}$

EXERCICE IV – (6 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = x\big(2 - \ln(x)\big)$$

On admet que cette fonction est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On note C_f la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

PARTIE A : Étude de fonction

1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = 1 - \ln(x)$$

c. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. Justifier que $f(x) \leqslant 0$ pour $x \in [e^2\,;+\infty[$.

3. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[e^2\,;e^3]$.

b. Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α au dixième.

c. Montrer que : $\ln(\alpha) = 2 + \dfrac{1}{\alpha}$

PARTIE B : Étude d'une suite

Le but de cette partie est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0{,}1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;e]$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0{,}1 \leqslant u_n \leqslant e$$

2. On admet que la suite (u_n) est croissante. En déduire qu'elle converge.

3. On admet que la limite L de cette suite vérifie l'équation $f(x) = x$.
Déterminer la valeur L.

PARTIE C : Calcul d'aire

On admet que la fonction f est négative ou nulle sur l'intervalle $[e^2\,;\alpha]$ où α est la valeur définie en Partie A.3.

On note $\mathcal{A}$ l'aire délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = e^2$ et $x = \alpha$.

1. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que

$$\int_{e^2}^{\alpha} x\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha^2(2\ln\alpha - 1) - 3e^4}{4}$$

2. **a.** Justifier que :

$$\mathcal{A} = \int_{e^2}^{\alpha} x\ln(x)\,\mathrm{d}x - \int_{e^2}^{\alpha} 2x\,\mathrm{d}x$$

b. En utilisant le résultat de la question **3.c.** dans la **Partie A**, montrer que

$$\mathcal{A} = \frac{\alpha(2-\alpha) + e^4}{4}$$