Exercice 4

Partie A

1 a) on a $f(1) = 1 + \frac{\ln(1)}{1} = 1$ ($\ln(1)=0$) et $f(e) = 1 + \frac{\ln(e)}{e} = 1 + \frac{1}{e}$ ($\ln(e)=1$)

b) on a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ ($\ln x \to -\infty$, $x \to 0$) donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

c) on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (avec les croissances comparées)

donc on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

2 a) on a $f(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}$ ($u = \ln x$, $v = x$) et on a $f'(x) = 0 + \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x)\times 1}{x^2}$ ($u' = \frac{1}{x}$, $v' = 1$, $v^2 = x^2$)

c'est à dire $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

b) on a $x^2 > 0$ sur $]0;+\infty[$ → le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $1-\ln x$ → on résout $1-\ln x \geq 0$

$-\ln x \geq -1$

$\ln x \leq 1 (= \ln e)$

$x \leq e$

x	0		e		$+\infty$
signes de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f	‖ $-\infty$	↗	$1+\frac{1}{e}$	↘	1

3 a) on a $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$

et on aura donc $f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\times x^2 - (1-\ln x)\times 2x}{(x^2)^2}$ ($u = 1-\ln x$, $u' = -\frac{1}{x}$, $v = x^2$, $v' = 2x$, $v^2 = (x^2)^2$)

avec $u(x) = 1-\ln(x)$ et $v(x) = x^2$

soit $f''(x) = \frac{-x - 2x(1-\ln x)}{x^4} = \frac{x(-1-2(1-\ln(x)))}{x^4}$

et on obtient $f''(x) = \frac{-1-2+2\ln(x)}{x^3} = \frac{2\ln(x)-3}{x^3}$

or, sur $]0;2]$, on a $x^3 > 0$ et on a $x \leq 2$

soit $\ln x \leq \ln(2)$

soit $2\ln(x) \leq 2\ln(2)$

soit $2\ln(x) - 3 \leq 2\ln(2) - 3 < 0$ ($\approx -1{,}6$)

on a donc $f''(x) < 0$ sur $]0;2]$

et la fonction f est bien concave sur $]0;2]$.

b) on applique la formule $y = f'(1)\times(x-1) + f(1)$

avec $f(1) = 1$ et $f'(1) = \dfrac{1-\ln(1)}{1^2} = 1$

on obtient : $y = 1\times(x-1)+1$ soit $y = x - \cancel{1} + \cancel{1} \rightarrow \boxed{y = x}$

c) La fonction f est concave sur $]0;2]$.
Sa courbe $\mathcal{C}_f$ sera donc en dessous des tangentes en chacun des points de $]0;2]$, et donc $\mathcal{C}_f$ sera en dessous de la tangente au point d'abscisse 1, sur l'intervalle $]0;2]$.
Ce qui correspond à $\boxed{f(x) \leq x}$ sur $]0;2]$

Partie B 1) pour ceux qui ne connaissent pas une primitive de $\frac{\ln x}{x}$, la valeur de l'intégrale est donnée afin de pouvoir faire la question 2.

on a $\dfrac{\ln x}{x} = \underbrace{\ln x}_{u} \times \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{u'}$ et une primitive de $\frac{\ln x}{x}$ s'écrira $\frac{1}{2}(\ln x)^2$

↳ primitive de $u\times u'$: $\frac{1}{2}u^2$

on a $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \underbrace{\frac{1}{2}(\ln 1)^2}_{=0}$

soit $\boxed{I = \frac{1}{2}(\ln 2)^2}$

2) on cherche l'aire $\mathcal{A}$ "entre" la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite Δ.

↳ on a $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^2 (y - f(x))\,dx = \int_1^2 \left(x - \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)\right)dx$

on obtient, par linéarité : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^2 x\,dx - \int_1^2 1\,dx - \underbrace{\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx}_{=I}$

soit $\mathcal{A} = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - [x]_1^2 - I$

$= \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) - (2-1) - \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

ou $\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left(1 - (\ln 2)^2\right) \text{ u.a}}$