# Exercice 3

**Affirmation 1** on résout l'équation $y' - y = 0$

soit $y' = 1y$

Les solutions seront du type $x \to Ae^{1x}$ soit $x \to Ae^{x}$, avec $A \in \mathbb{R}$.

On aura donc $f(x) = Ae^{x}$ et on veut $f(1) = 1$.

On en déduit $f(1) = Ae^{1} = 1$ soit $A = \frac{1}{e} = e^{-1}$

Donc on aura ici $f(x) = e^{-1} \times e^{x}$

ce qui nous donne bien $f(0) = e^{-1} \times \underbrace{e^{0}}_{=1} = e^{-1}$ → **VRAIE**

**Affirmation 2**

on reconnait ici une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

On applique une formule à bien connaitre :

$$\text{somme des termes} = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{(\text{nombre de termes})}}{1 - \text{raison}}$$

On obtient ici :

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

or, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

et on a $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \boxed{1}$ et la suite converge vers 1

→ **FAUSSE**

**Affirmation 3**

on sait que, pour tout $n$, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

et on en déduit $n - 1 \leq n + \cos(n) \leq n + 1$

soit $$\frac{n-1}{n+1} \leq \frac{n + \cos(n)}{n+1} \leq \underbrace{\frac{n+1}{n+1}}_{=1}$$

On a $\frac{n-1}{n+1} = \frac{\cancel{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Donc, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

on en déduit, par quotient des limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n+1} = \boxed{1}$

on a donc $\frac{n-1}{n+1} \leq u_n \leq 1$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$

et, par application du théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \boxed{1}$

→ VRAIE

## Affirmation 4

on a ici un raisonnement par récurrence à faire.

initialisation on sait que $v_0 = \boxed{6}$

et on vérifie que $v_0 = 2 + 4^{0+1} = 2 + 4^1 = 2 + 4 = \boxed{6}$

Donc la propriété est bien vérifiée au rang 0.

Hérédité

on suppose la propriété vraie au rang $n$ : $v_n = 2 + 4^{n+1}$

et montrons la propriété vraie au rang $(n+1)$ soit $v_{n+1} = 2 + 4^{n+2}$ ($(n+1)+1$)

on sait que $v_{n+1} = 4v_n - 6$

et on obtient donc $v_{n+1} = 4 \times (2 + 4^{n+1}) - 6$

$= 8 + \underbrace{4 \times 4^{n+1}}_{=4^{n+2}} - 6 = 4^{n+2} + 2$

et on a bien l'égalité souhaitée, et d'après le principe de récurrence, la propriété est bien vraie pour tout $n$

→ VRAIE