Exercice 1 1) a) I milieu de [AB] $\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B}{2} \\ \frac{y_A+y_B}{2} \\ \frac{z_A+z_B}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-3+2}{2} \\ \frac{0+2}{2} \\ \frac{-1+0}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) Le vecteur $\vec{AB}$ sera ici un vecteur normal au plan P.

on a $\vec{AB}\begin{pmatrix} 2-(-3) \\ 2-0 \\ 0-(-1) \end{pmatrix} \rightarrow \vec{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et cela nous donne les coefficients a, b et c de l'équation cartésienne de P.

on a donc : $5x + 2y + 1z + d = 0$ (a, b, c)

or, le point I appartient à P et on aura : $5\times(-\frac{1}{2}) + 2\times 1 + 1\times(-\frac{1}{2}) + d = 0$ (x_I, y_I, z_I)

on en déduit $-1 + d = 0$ soit $d = 1$

et l'équation du plan P : $\boxed{5x + 2y + z + 1 = 0}$

c) pour le point C, on calcule $5\times(-1) + 2\times\frac{1}{2} + 3 + 1 = \boxed{0}$

donc on a $C \in P$

pour le point D, on calcule $5\times(-6) + 2\times 0 + (-1) + 1 = \boxed{-30} \neq 0$

donc on a $D \notin P$

2) a) La droite Δ est orthogonale au plan P et un vecteur directeur de cette droite sera $\vec{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est normal à ce plan.

on aura donc pour Δ $\begin{cases} x = -6 + 5\times k \\ y = 0 + 2\times k \\ z = -1 + 1\times k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -6 + 5k \\ y = 2k \\ z = -1 + k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

(point D ; vecteur directeur)

b) ce point H est donc le point d'intersection de la droite Δ et du plan P.

↳ on "écrit" donc la représentation de Δ dans l'équation du plan P.

on obtient : $5\times(-6+5k) + 2\times(2k) + (-1+k) + 1 = 0$

soit $-30 + 30k = 0 \rightarrow \boxed{k = 1}$

Les coordonnées du point H seront donc

$H\begin{pmatrix} x = -6+5\times 1 \\ y = 2\times 1 \\ z = -1+1 \end{pmatrix}$ soit $H\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

on remplace k par 1 dans la représentation de Δ

c) La distance du point D au plan P correspond ici à DH.

On a $DH = \sqrt{(x_H - x_D)^2 + (y_H - y_D)^2 + (z_H - z_D)^2}$

$= \sqrt{(-1-(-6))^2 + (2-0)^2 + (0-(-1))^2}$

$= \sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{30}$

3 En prenant les représentations paramétriques de chaque droite, on obtient un vecteur directeur pour chacune.

pour (CI), on aura $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-7\end{pmatrix}$ et pour (d), on aura $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-12\\-1\end{pmatrix}$

on calcule $\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-12\\-1\end{pmatrix} = 1\times5 + 1\times(-12) + (-7)\times(-1) = 0$

Donc on a $\vec{u} \perp \vec{v}$ et on a donc $(CI) \perp (d)$.

Il nous reste à montrer que ces droites sont sécantes.

↳ on résout le système $\begin{cases} -1+t = -1+5s \\ \frac{1}{2}+t = 2-12s \\ 3-7t = -s \end{cases}$

on va ici isoler t avec la première équation, pour le remplacer dans la deuxième et la troisième équation.

on obtient $\begin{cases} t = 5s \\ \frac{1}{2}+5s = 2-12s \\ 3-7\times5s = -s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 5s \\ 17s = \frac{3}{2} \quad (2-\frac{1}{2}) \\ -34s = -3 \end{cases}$

on en déduit $\begin{cases} t = 5s \\ s = \frac{3}{2}:17 = \boxed{\frac{3}{34}} \\ s = \frac{-3}{-34} = \boxed{\frac{3}{34}} \end{cases}$ → on a bien le même résultat.

Donc les droites (CI) et (d) sont bien sécantes et on avait déjà $(CI) \perp (d)$

↳ donc les droites se coupent orthogonalement.

Les coordonnées du point d'intersection ne sont pas demandées mais elles seraient obtenues en remplaçant s par $\frac{3}{34}$ ou t par $5\times\frac{3}{34} = \frac{15}{34}$, ce qui nous donnerait $\left(-\frac{19}{34} ; \frac{26}{17} ; \frac{-3}{34}\right)$.