Exercice 4

Partie A

1 a) en 0, on écrit $f(x) = 2x - x\ln x$ ($2x \to 0$, $-x\ln x \to 0$ par croissances comparées) $\to \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \boxed{0}$

et en $+\infty$, on a $f(x) = x(2-\ln x)$ et, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$

b) on a $f(x) = \underbrace{x}_{u}\underbrace{(2-\ln x)}_{v}$ $\to$ on a donc $f'(x) = \underbrace{1}_{u'}\times\underbrace{(2-\ln x)}_{v} + \underbrace{x}_{u}\times\underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{v'}$

on obtient donc $f'(x) = 2 - \ln x - 1 = \boxed{1 - \ln(x)}$

c) on a $1-\ln(x) = 0$ pour $\ln(x) = 1$ c'est à dire $x = e$

et on aura donc $f'(x) \leq 0$ pour $x \geq e$, soit f décroissante sur $[e;+\infty[$

et $f'(x) \geq 0$ pour $x \leq e$, soit f croissante sur $]-\infty;e]$

2 on résume tout cela dans un tableau de variations

x	0		e		e^2		$+\infty$
variations de f	0	↗	e	↘	0	↘	$-\infty$

on a $f(e) = e(2-\ln(e)) = e(2-1) = e$

et $f(e^2) = e^2(2-\ln(e^2)) = e^2(2-2\ln e) = e^2(2-2) = 0$

on a donc : $f(e^2) = 0$ et f décroissante sur $[e^2;+\infty[$

et on aura donc $f(x) \leq 0$ sur $[e^2;+\infty[$.

3 a) La fonction f est continue et décroissante sur $[e^2;e^3]$

on a $f(e^2) = \boxed{0}$ et $f(e^3) = e^3(2-\ln(e^3)) = e^3(2-3\ln e) = \boxed{-e^3}$

on constate donc que $-1 \in [f(e^3);f(e^2)]$, et d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = -1$ possède une unique solution sur $[e^2;e^3]$

b) avec la calculatrice, on obtient $\boxed{8{,}3 \leq \alpha \leq 8{,}4}$

c) le nombre α vérifie donc l'équation $f(\alpha) = -1$

c'est à dire $\alpha(2-\ln(\alpha)) = -1$

soit $2 - \ln(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} \to -\ln(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} - 2$

ou $\boxed{\ln(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + 2}$

Partie B

1 initialisation on a $U_0 = 0{,}1$ donc on a bien $0{,}1 \leq U_0 \leq e$

et la propriété est bien vérifiée au rang 0.

Hérédité on suppose $0{,}1 \leq U_n \leq e$

on obtient $f(0{,}1) \leq f(U_n) \leq f(e)$ (la fonction f est croissante et conserve l'ordre)

$\approx 0{,}43$ $\quad = e$

et on a bien $0{,}1 \leq U_{n+1} \leq e$

Donc, si on suppose la propriété vraie au rang n, alors elle reste vraie au rang $(n+1)$ et, d'après le principe de récurrence, on aura bien, pour tout n, $\boxed{0,1 \leq u_n \leq e}$

2 La suite (u_n) est donc croissante et majorée (car $u_n \leq e$).
Donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge.

3 Sa limite L va vérifier $f(L) = L$
soit $L(2 - \ln(L)) = L$
on peut ici diviser par L car on a forcément $L \neq 0$ (car $u_n \geq 0,1$)
on obtient $2 - \ln(L) = 1$ soit $\ln(L) = 1$
c'est à dire $\boxed{L = e}$

Partie C

2 on a $\displaystyle\int_{e^2}^{\alpha} x\ln(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\times\ln x\right]_{e^2}^{\alpha} - \int_{e^2}^{\alpha}\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,dx$
($u'\times v$; $u\times v$; $u\times v'$)

$$= \frac{\alpha^2}{2}\ln(\alpha) - \frac{(e^2)^2}{2}\ln(e^2) - \frac{1}{2}\int_{e^2}^{\alpha} x\,dx$$
$$= \frac{\alpha^2}{2}\ln(\alpha) - \frac{e^4}{2}\times 2\underbrace{\ln(e)}_{=1} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{e^2}^{\alpha}$$
$$= \frac{\alpha^2}{2}\ln(\alpha) - e^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{(e^2)^2}{2}\right)$$
$$= \frac{\alpha^2}{2}\ln(\alpha) - e^4 - \frac{\alpha^2}{4} + \frac{e^4}{4} = \frac{\alpha^2(2\ln\alpha - 1) - 3e^4}{4}$$

2 a) La fonction f est négative sur $[e^2 ; \alpha]$
→ on aura donc $A = -\displaystyle\int_{e^2}^{\alpha} f(x)\,dx = -\int_{e^2}^{\alpha} x(2-\ln x)\,dx$
ne pas oublier

et on obtient $A = -\displaystyle\int_{e^2}^{\alpha}(2x - x\ln x)\,dx = \int_{e^2}^{\alpha} x\ln x\,dx - \int_{e^2}^{\alpha} 2x\,dx$
par linéarité de l'intégrale

$\displaystyle\int_{e^2}^{\alpha} 2x\,dx = \left[x^2\right]_{e^2}^{\alpha} = \alpha^2 - (e^2)^2 = \alpha^2 - e^4$

on obtient : $A = \dfrac{\alpha^2(2\ln\alpha - 1) - 3e^4}{4} - (\alpha^2 - e^4)$ avec $\ln(\alpha) = 2 + \dfrac{1}{\alpha}$

on en déduit $A = \dfrac{\alpha^2\left(2\left(2+\frac{1}{\alpha}\right) - 1\right) - 3e^4 - 4(\alpha^2 - e^4)}{4}$

soit $A = \dfrac{4\alpha^2 + 2\alpha - \alpha^2 - 3e^4 - 4\alpha^2 + 4e^4}{4}$

$$= \frac{2\alpha - \alpha^2 + e^4}{4} \rightarrow \boxed{A = \frac{\alpha(2-\alpha) + e^4}{4}}$$