Exercice 2

Partie A

1 on va montrer que $\vec{AB} \perp \vec{AC}$ en vérifiant que $\vec{AB}.\vec{AC} = 0$

on a $\vec{AB}\begin{pmatrix} 6-3 \\ 1-(-2) \\ 5-2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix} 6-3 \\ -2-(-2) \\ -1-2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

et on a donc $\vec{AB}.\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\times3 + 3\times0 + 3\times(-3) = \boxed{0}$

Donc on a bien $\vec{AB} \perp \vec{AC}$ → le triangle ABC est rectangle en A.

2 on vérifie l'équation du plan avec les coordonnées du point A

↳ on a $3 + (-2) + 2 - 3 = \boxed{0}$ donc on a $\boxed{A \in \mathcal{P}}$

(x_A, y_A, z_A)

3 Le vecteur $\vec{AC}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathcal{P}'$.
Les coordonnées de $\vec{AC}$ seront donc les coefficients a, b et c de l'équation cartésienne de $\mathcal{P}'$.

on aura donc : $3x + 0y + (-3)z + d = 0$

soit $3x - 3z + d = 0$

or on a $A \in \mathcal{P}'$ et on a donc $3\times3 - 3\times2 + d = 0 \rightarrow d = -3$

(x_A, z_A)

On en déduit l'équation de $\mathcal{P}'$: $\boxed{3x - 3z - 3 = 0}$ ou $\boxed{x - z - 1 = 0}$

4 il suffit de vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les coordonnées données par la représentation paramétrique de (Δ) vérifient l'équation cartésienne de chacun des plans.

↳ pour $\mathcal{P}$, on vérifie $(t+1) + (-2t+2) + t - 3 = \boxed{0}$

et pour $\mathcal{P}'$, on vérifie $(t+1) - (t) - 1 = \boxed{0}$

(il suffit de réduire chaque expression ici)

Donc (Δ) est bien la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Partie B

1 on va montrer que le vecteur $\vec{AS}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, non colinéaires, du plan (ABC).

on a $\vec{AS}\begin{pmatrix} 0-3 \\ 4-(-2) \\ -1-2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{AS}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

et on a donc $\vec{AS}.\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3\times3 + 6\times3 + (-3)\times3 = 0$ soit $\vec{AS} \perp \vec{AB}$

et $\vec{AS}.\vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = -3\times3 + 6\times0 + (-3)\times(-3) = 0$ soit $\vec{AS} \perp \vec{AC}$

↳ on a bien (AS) orthogonale à (ABC).

2 En prenant le triangle ABC comme base, [AD] sera la hauteur associée.

On aura $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{ABC} \times AD$

or ABC est un triangle rectangle en A $\rightarrow \text{Aire}_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2}$.

avec $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$, on a $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{3^2+3^2+3^2} = \sqrt{27}$

avec $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$, on a $AC = \|\vec{AC}\| = \sqrt{3^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{18}$

et avec $\vec{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$, on a $AD = \|\vec{AD}\| = \sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2} = \sqrt{54}$

on obtient alors : $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{27} \times \sqrt{18}}{2} \times \sqrt{54} = \boxed{27}$ u.v.

3 (encore des calculs de coordonnées de vecteurs et de longueurs !!)

on a $\vec{DB}\begin{pmatrix}6-0\\1-4\\5-(-1)\end{pmatrix} \rightarrow \vec{DB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{DC}\begin{pmatrix}6-0\\-2-4\\-1-(-1)\end{pmatrix} \rightarrow \vec{DC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$

on alors $DB = \|\vec{DB}\| = \sqrt{6^2+(-3)^2+6^2} = \sqrt{81} = 9$

et $DC = \|\vec{DC}\| = \sqrt{6^2+(-6)^2+0^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

on travaille dans un repère orthonormal et on a donc :

$\vec{DB}.\vec{DC} = \begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix} = 6\times6+(-3)\times(-6)+6\times0 = \boxed{54}$

et on sait que $\vec{DB}.\vec{DC} = DB \times DC \times \cos(\widehat{BDC})$

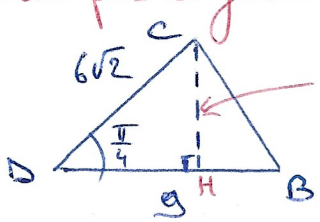
$\quad 54 \quad\quad 9 \quad 6\sqrt{2}$

on en déduit $54 = 9 \times 6\sqrt{2} \times \cos(\widehat{BDC}) \rightarrow \cos(\widehat{BDC}) = \frac{54}{9\times6\sqrt{2}}$

et on obtient $\cos(\widehat{BDC}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ soit $\boxed{\widehat{BDC} = \frac{\pi}{4}}$

4 (question pas si facile car le raisonnement est peu attendu en Terminale)

croquis



c'est la hauteur relative à la base [DB] du triangle et on utilise une formule trigonométrique

$\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{CH}{6\sqrt{2}}$ soit $CH = 6\sqrt{2} \times \sin(\frac{\pi}{4})$ $\quad = \frac{\sqrt{2}}{2}$

on en déduit : $\text{Aire}_{BDC} = \frac{1}{2} \times DB \times CH = \frac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{27}$

base ↑ hauteur associée ↑

5 La distance cherchée correspond à la hauteur h relative à la base BCD de la pyramide ABCD.

on sait que $V_{ABCD} = 27$

et on a $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{BCD} \times h$ soit $27 = \frac{1}{3} \times 27 \times h$

on en déduit $h = \boxed{3}$.