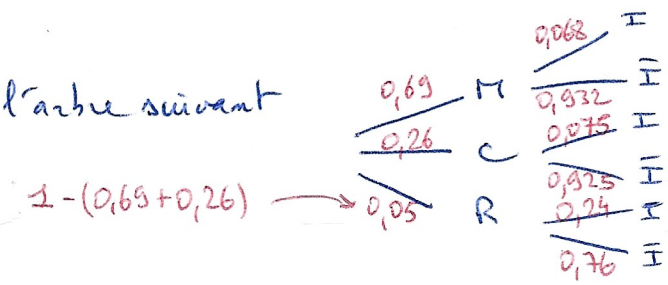
Exercice 1

Partie A

1. on a l'arbre suivant



2. on utilise la formule des probabilités totales :

$$p(I) = p(M \cap I) + p(C \cap I) + p(R \cap I)$$
$$= 0{,}69 \times 0{,}068 + 0{,}26 \times 0{,}075 + 0{,}05 \times 0{,}24 = \boxed{0{,}07842}$$

3. on cherche ici $p_{\bar{I}}(R) = \dfrac{p(R \cap \bar{I})}{p(\bar{I})} = \dfrac{p(R) \times p_R(\bar{I})}{1 - p(I)} = \dfrac{0{,}05 \times 0{,}76}{1 - 0{,}07842}$

et on obtient $p_{\bar{I}}(R) \approx \boxed{0{,}041}$

Partie B

1. on peut assimiler ce choix à une série d'épreuves identiques et indépendantes, avec 2 issues possibles.
on a donc ici une loi binomiale de paramètre n
et $p = p(I) = 0{,}078$.

2. a) on cherche $p(X_n \geq 1) = 1 - p(X_n = 0)$

$$= 1 - \binom{n}{0} \times p^0 \times (1-p)^{n-0}$$
$$= 1 \quad = 1 \quad = (1-0{,}078)^n$$

et on obtient $p(X_n \geq 1) = 1 - (0{,}922)^n$ soit $p_n = 1 - (0{,}922)^n$

b) on cherche n tel que $p_n \geq 0{,}99$
et on résout l'inéquation $1 - (0{,}922)^n \geq 0{,}99$
on obtient $(0{,}922)^n \leq 0{,}01$
soit $\ln(0{,}922)^n \leq \ln(0{,}01)$ (la fonction ln est croissante et elle conserve l'ordre.)
soit $n \times \ln(0{,}922) \leq \ln(0{,}01)$
on obtient alors $n \geq \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}922)}$ (inversion car on a divisé par $\ln(0{,}922)$ qui est négatif)
$\approx 56{,}7$

↳ on aura donc $p_n \geq 0{,}99$ à partir d'un échantillon de 57 patients.

3) a) on a $E(R_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} E(X_n) = \frac{1}{n} \times np = p = \boxed{0,078}$

par linéarité de l'espérance — espérance d'une loi binomiale

b) pour une variable aléatoire R_n, on aura :

$$p(|R_n - E(R_n)| \geq a) \leq \frac{V(R_n)}{a^2} \quad , \text{pour } a > 0$$

c) avec $V(R_n) = \frac{0,071916}{n}$ et $a = 0,1$, on obtient

$$p(|R_n - 0,078| \geq 0,1) \leq \frac{0,071916}{n \times 0,1^2}$$

on a $\frac{0,071916}{0,1^2} = 7,1916 \leq 7,2$

et on en déduit $p(|R_n - 0,078| \geq 0,1) \leq \frac{7,2}{n}$

d) on a ici $n = 500$ et l'inégalité précédente devient :

$$p(|R_{500} - 0,078| \geq 0,1) \leq \frac{7,2}{500} \quad \text{avec } \frac{7,2}{500} = 0,0144 \text{ ou } 1,44\%$$

Donc, dans un échantillon de 500 personnes, la probabilité que la variable R_{500} vérifie $|R_{500} - 0,078| \geq 0,1$ est inférieur ou égal à 1,44%.

or, $|R_{500} - 0,078| \geq 0,1$ peut ici se transformer en

$R_{500} \geq 0,1 + 0,078$ soit $R_{500} \geq 0,178$ ou 17,8%

Donc, on a moins de 1,44% de chances d'avoir un pourcentage de prélèvements avec infection supérieur ou égal à 17,8%.

Donc, avec 20% de prélèvements avec une infection, on se trouve bien devant un cas considéré comme exceptionnel.