Épreuve anticipée de mathématiques (première)

Corrigé

Voie générale – Série avec spécialité – Amérique du Sud – 17 novembre 2026

A. P. M. E. P.

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 pts)

Question 1

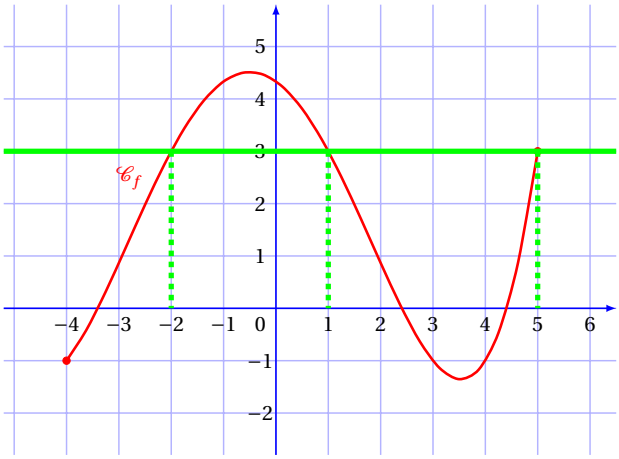
$\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, **réponse B**.

Question 2

C'est une identité remarquable !
$(2x+3)^2=(2x)^2+2\times 2x\times 3+3^2=4x^2+12x+9$, **réponse D**.

Question 3

$f(x)<3$ lorsque $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de la droite d'équation $y=3$.
C'est une inégalité stricte, donc les intervalles sont ouverts aux bornes, sauf en -4.
Donc $\mathscr{S}=[-4\,;-2[\cup]1\,;5[$, **réponse C**.



Question 4

Le coefficient directeur de la droite (RS) vaut $\frac{y_S-y_R}{x_S-x_R}=\frac{2-2025}{2026-1}=-\frac{2023}{2025}$, **réponse C**.

Question 5

Le prix a été multiplié par 0,8, puis par 1,25, or $0{,}8\times 1{,}25=1$, donc ce prix est inchangé, **réponse D**.

Question 6

Le coefficient de x^2 est 2, strictement positif, donc la parabole est ouverte vers le haut.
Elle coupe l'axe des abscisses en -5 et en $\frac{1}{2}$, c'est donc la **réponse C**.

Question 7

Il y a en tout 600 élèves, dont $25+22+28=75$ suivent l'option cinéma. 10% de 600, c'est 60, donc la seule réponse possible est 12,5%, **réponse B**.

Question 8

Il y a $15+25+140=180$ élèves de Seconde, dont 25 suivent l'option cinéma.
Donc $P_S(C)=\dfrac{25}{180}=\dfrac{5\times5}{5\times36}=\dfrac{5}{36}$, **réponse A**.

DEUXIÈME PARTIE (14 pts)

Exercice 1 (5 points)

1. La population diminue de 5%, ce qui revient à dire que le nombre de hamsters est multiplié par 0,95. Il y aura donc selon ce modèle 3 040 hamsters en 2026.

2. **a.** Diminuer une quantité de 5% revient à la multiplier par 0,95.
(u_n) est donc une suite géométrique, de raison 0,95 et de premier terme $u_0=3\,200$.

b. L'expression explicite de (u_n) est donc, pour tout n entier naturel, $u_n=3\,200\times0{,}95^n$

c. Pour l'année 2040, on a donc $n=15$.
Donc la population prévue de hamsters serait en 2040 de $3\,200\times0{,}95^{15}$

Partie B

1. **a.** Par rapport au modèle précédent, il y a donc 300 hamsters supplémentaires en 2026,
donc $v_1=3\,040+300=3\,340$.

b. On calcule $v_2=0{,}95\times3\,340+300$

2. On constate que $\dfrac{v_1}{v_0}=\dfrac{3\,340}{3\,200}\approx1{,}044$, et que $\dfrac{v_2}{v_1}=\dfrac{3\,473}{3\,340}\approx1{,}040$.
Donc, $\dfrac{v_1}{v_0}\neq\dfrac{v_2}{v_1}$: la suite (v_n) n'est donc pas géométrique.

3. On conjecture que la limite de la suite (v_n) est 6 000.
Cela signifie qu'à (très) long terme, la population de hamsters se stabilisera à environ 6 000 individus, selon ce modèle.

4. La fonction calcule, à partir de la valeur initiale, la population de hamsters chaque année.
Elle cesse ce calcul lorsque la population devient supérieure ou égale à l'argument de la fonction, ici 5 000.
Ce résultat signifie que, selon le modèle, la population de hamsters dépassera 5 000 individus à partir de 2046

Exercice 2 (9 points) « Le pendentif d'or ».

partie A

1. On connaît les coordonnées de A. OA $= \sqrt{(-3-0)^2+(-4-0)^2} = 5$, donc A appartient bien au cercle de centre O et de rayon 5.

2. Un vecteur directeur de (AD) est donc $\overrightarrow{AD}$ qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Tout vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AD}$, par exemple $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (AD) ; en effet $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = -5 \times 8 + 4 \times 10 = 0$.

3. **a.** O n'appartient pas à la droite (AD) puisque $5 \times 0 - 4 \times 0 - 1 \neq 0$, donc A, O et D ne sont pas alignés.

b. Les coordonnées de $\overrightarrow{OB}$ sont $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

On peut donc calculer $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB} = 8 \times 3 + 10 \times (-4) = -16$: le produit scalaire est différent de 0, les deux vecteurs ne sont pas orthogonaux, et les droites (AD) et (OB) ne sont donc pas perpendiculaires.

4. **a.** On a déjà les coordonnées de $\overrightarrow{OB}$, celles de $\overrightarrow{OA}$ sont $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, et donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -3 \times 3 + (-4) \times (-4) = 7$.

b. On sait que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \text{OA} \times \text{OB} \times \cos(\widehat{\text{AOB}})$. Puisque A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 5, on a donc $OA = OB = 5$, et par conséquent $\cos(\widehat{\text{AOB}}) = \dfrac{7}{25}$.

Le secteur angulaire $\widehat{\text{AOB}}$ mesure donc environ 74°.

Partie B - Étude du coût de production minimal

1. **a.** Si le bijoutier produit 60 pendentifs, on a donc $x = 6$, et le coût unitaire de production est donné par $f(6) = (6-6)\,\text{e}^{1,2} + 8 = 8$.

Pour une production de 60 pendentifs, le coût unitaire est de 8 000 euros par pendentif.

b. Le bijoutier aurait donc un bénéfice de 8 500 − 8 000 = 500 euros par pendentif, soit de $60 \times 500 = 30\,000$ euros au total.

2. On utilise la formule $\left(u\,v\right)' = u'\,v + v'\,u$, avec $u(x) = x - 6$ donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = \text{e}^{0,2x}$ donc $v'(x) = 0,2\,\text{e}^{0,2x}$.

On a donc $f'(x) = \text{e}^{0,2x} + (x-6) \times 0,2\,\text{e}^{0,2x} = (1 + 0,2x - 0,2 \times 6)\,\text{e}^{0,2x}$.

Donc $f'(x) = (0,2x - 0,2)\,\text{e}^{0,2x} = 0,2(x-1)\,\text{e}^{0,2x}$

3. L'exponentielle est toujours positive, donc le signe de f' ne dépend que du signe de $x - 1$, qui est négatif pour $x < 1$ et positif si $1 < x < 6$.

On peut donc construire le tableau de variations de f.

x	0		1		6
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	$8-5\,e^{0,2}$	↗	8

4. **a.** Le bijoutier doit donc fabriquer exactement 10 pendentifs pour le coût unitaire soit minimal.

b. La valeur exacte de ce coût unitaire se calcule en utilisant $f(1) = (1-6)\,e^{0,2} + 8$.

Le coût unitaire est alors de $1\,000 \times (8 - 5\,e^{0,2})$ euros.