

Exercice 4

Partie A

c'est surprenant mais on peut gérer cette partie sans utiliser la forme algébrique $f_2(x) = 1 - x + \frac{2(1+\ln x)}{x}$.

[1] on sait que $F_2'(x) = f_2(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Donc le signe de f_2 nous donnera les variations de F_2 .

D'après $\mathcal{C}_2$, il semble que $f_2(x) \leq 0$ sur $]0; 0,3]$

puis $f_2(x) \geq 0$ sur $[0,3; 2,5]$

et enfin $f_2(x) \leq 0$ sur $[2,5; 3]$.

Donc F_2 serait décroissante sur $]0; 0,3]$, croissante sur $[0,3; 2,5]$ et décroissante sur $[2,5; 3]$.

[2] La courbe $\mathcal{C}_2$ est croissante sur un intervalle qui semble correspondre à $]0; 0,75]$.

Donc on aura $f_2'(x) \geq 0$ sur cet intervalle $]0; 0,75]$

et donc la fonction f_2' correspond à la courbe 1.

La courbe $\mathcal{C}_2$ est concave jusqu'au point d'inflexion A, c'est à dire sur un intervalle qui correspond à $]0; 1,6]$.

Donc on aura $f_2''(x) \leq 0$ sur cet intervalle $]0; 1,6]$

et donc la fonction f_2'' correspond à la courbe 2.

Partie B

[1] [a] on a $f(x) = 1 - x + \frac{1 + \ln(x)}{x}$ ($\frac{u}{v}$)'
donc on a $f'(x) = -1 + \frac{\frac{1}{x} \times \frac{1}{x} - (1 + \ln x) \times 1}{x^2}$

$$\rightarrow f'(x) = -1 + \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = -1 - \frac{\ln x}{x^2}$$

[b] on a $\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x}$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (croissance comparée)
et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Donc, par produit des limites, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1'(x) = -1$$

2 a) Le signe de $f_1''(x)$ ne dépend que du signe de $2\ln(x) - 1$ car on a $x^3 > 0$ sur $]0; +\infty[$.

et on a $2\ln(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq e^{\frac{1}{2}}$

donc, sur $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$, on a $f_1''(x) \geq 0$ et f_1' croissante.

De même, on aura, sur $]0; e^{\frac{1}{2}}]$, $f_1''(x) \leq 0$ et f_1' décroissante.

Le minimum de la fonction est atteint en $e^{\frac{1}{2}}$ et il est égal

à $f_1'(e^{\frac{1}{2}}) = -1 - \frac{\ln(e^{\frac{1}{2}})}{(e^{\frac{1}{2}})^2} = -1 - \frac{\frac{1}{2}}{e} = -1 - \frac{1}{2e}$

b) on a $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

donc, par quotient des limites, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty$

et donc $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\ln(x)}{x^2} = +\infty$ soit $\lim_{x \rightarrow 0} f_1'(x) = +\infty$

c) sur $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$, l'équation $f_1'(x) = 0$ n'a aucune solution car on a $f_1'(x) < -1$ (< 0) sur cet intervalle.

sur $]0; e^{\frac{1}{2}}]$, la fonction f_1' est continue et strictement décroissante

on a $\lim_{x \rightarrow 0} f_1'(x) = +\infty$ et $f_1'(e^{\frac{1}{2}}) = -1 - \frac{1}{2e} (< 0)$

on a bien $0 \in [-1 - \frac{1}{2e}; +\infty[$ et d'après le corollaire

du TVI, l'équation $f_1'(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; e^{\frac{1}{2}}]$ donc sur $]0; +\infty[$.

les variations de f_1' vont maintenant nous donner le signe de $f_1''(x)$ et donc les variations de f_1 .

x	0	x	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
variations de f_1'	$+\infty$	$+$	0	$-1 - \frac{1}{2e}$
signes de $f_1''(x)$	$+$	0	$-$	
variations de f_1		$\nearrow$	$\searrow$	

Donc la fonction f_1 admet bien maximum $f_1(x)$ en x .

[1] on complète le programme avec $\text{while } d(u) > 0$
 $u = u + 0,01$

(car $d(u)$ représente la fonction f_1 et on a $f_1(0,5) \approx 2,77 > 0$.
Donc, tant que $d(u)$ reste strictement positif, on fait "avancer" la
valeur de la variable u de 0,01 en 0,01)

Partie C

[2] on calcule $H'(x) = \left(\frac{1}{2}(1+\ln x)^2 \right)'$ on a $(u^2)' = 2u u'$
et on obtient $H'(x) = \frac{1}{2} \times \underbrace{2}_{u} (1+\ln x) \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} = \frac{1+\ln x}{x} = h(x)$

Donc la fonction H est bien une primitive de h sur $]0, +\infty[$.

[2] on note v_m cette valeur moyenne.

et on a $v_m = \frac{1}{e-1} \times \int_1^e \left(1-x + \frac{k(1+\ln x)}{x} \right) dx$ on reconnaît $h(x)$

$$\begin{aligned} \rightarrow v_m &= \frac{1}{e-1} \times \left[x - \frac{x^2}{2} + k H(x) \right]_1^e \\ &= \frac{1}{e-1} \left(e - \frac{e^2}{2} + k H(e) - \left(1 - \frac{1^2}{2} + k H(1) \right) \right) \end{aligned}$$

avec $H(e) = \frac{1}{2} \left(1 + \ln(e) \right)^2 = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2$ et $H(1) = \frac{1}{2} \left(1 + \ln(1) \right)^2 = \frac{1}{2}$

on obtient $v_m = \frac{1}{e-1} \left(e - \frac{e^2}{2} + 2k - 1 + \frac{1}{2} - k \times \frac{1}{2} \right)$

soit $v_m = \frac{1}{e-1} \left(e - \frac{e^2}{2} + \frac{3}{2}k - \frac{1}{2} \right)$

on cherche k tel que $v_m = 0$ soit $e - \frac{e^2}{2} + \frac{3}{2}k - \frac{1}{2} = 0$

on obtient $\frac{3}{2}k = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}$

soit $k = \frac{2}{3} \left(\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} \right) = \boxed{\frac{e^2 - 2e + 1}{3}}$

↙
c'est l'unique valeur de k qui permet d'avoir
la valeur moyenne de f_k sur $[1, e]$ égale à 0 !