

Exercice 3

Affirmation 1

on s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle (E_1)

$$\hookrightarrow \text{on a } y' + 2y = 0$$

$$\text{soit } y' = -2y$$

Les solutions seront de la forme $x \mapsto Ae^{-2x}$, avec $A \in \mathbb{R}$.

Donc on cherche la fonction f qui s'écrit $f(x) = Ae^{-2x}$ et qui vérifie $f(0) = 1$.

$$\text{on obtient } \underbrace{Ae^{-2 \cdot 0}}_{=1} = 1 \rightarrow A = 1 \rightarrow f(x) = 1 \cdot e^{-2x} = e^{-2x}$$

et pour savoir si la courbe de f passe par A , il faut calculer $f(\ln 2)$ et vérifier si le résultat est égal à $\frac{1}{2}$

$$\text{On a } f(\ln 2) = e^{-2 \ln 2} = e^{\ln 2^{-2}} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}$$

$\rightarrow$ Affirmation **FAUSSE**

Affirmation 2

on va chercher à savoir si la fonction f est concave sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$.

$$\text{on a } f(x) = x - \cos(x)$$

$$\hookrightarrow f'(x) = 1 - (-\sin(x)) = 1 + \sin(x)$$

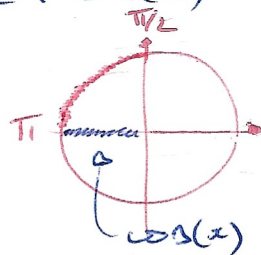
$$\hookrightarrow f''(x) = \cos(x)$$

$$\text{or, on a } \cos(x) \leq 0 \text{ sur } [\frac{\pi}{2}; \pi]$$

$$\text{Donc on a } f''(x) \leq 0 \text{ sur } [\frac{\pi}{2}; \pi].$$

la fonction f est concave sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ et sa courbe se situe en dessous de ses tangentes.

$\rightarrow$ affirmation **FAUSSE**



Affirmation 3

on sait que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ pour $x \in]0; +\infty[$

et on a donc $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$

or, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \boxed{0}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{0}$

et en appliquant le Théorème des gendarmes, on aura :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \boxed{0}$$

↳ on obtient, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \boxed{1}$

Donc la courbe représentative de f admet bien une asymptote horizontale d'équation $y=1$.

→ affirmation **VRAIE**

Affirmation 4

il suffit de calculer $f'(x) - 3f(x)$ et de vérifier si le résultat est bien égal à $2 - 6x$.

$$\text{on a } f(x) = 2x - e^{3x}$$

$$\text{soit } f'(x) = 2 - 3e^{3x}$$

$$\text{on a donc } f'(x) - 3f(x)$$

$$= 2 - 3e^{3x} - 3(2x - e^{3x})$$

$$= 2 - \cancel{3e^{3x}} - 6x + \cancel{3e^{3x}} = \boxed{2 - 6x}$$

→ affirmation **VRAIE**