

Exercice 2

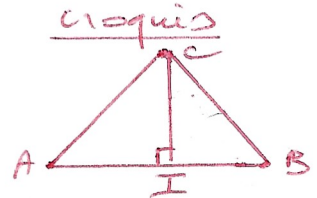
Partie A [1] on a $\vec{AC} \begin{pmatrix} \frac{9}{4} - 0 \\ 3 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{AC} \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC} \begin{pmatrix} \frac{9}{4} - \frac{9}{2} \\ 3 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{BC} \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc on a $AC = \|\vec{AC}\| = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4}$

et $BC = \|\vec{BC}\| = \sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4}$

Donc on a $AC = BC \rightarrow$ le triangle ABC est isocèle en C .

[2] on aura Aire $_{ABC} = \frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2} = \frac{AB \times CI}{2}$



avec I , milieu de $[AB]$, dont les coordonnées sont $I \begin{pmatrix} \frac{0+\frac{9}{2}}{2} \\ \frac{0+0}{2} \\ \frac{0+0}{2} \end{pmatrix} \rightarrow I \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

on a donc $\vec{CI} \begin{pmatrix} \frac{9}{4} - \frac{9}{4} \\ 0 - 3 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{CI} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $CI = \|\vec{CI}\| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$

on a aussi $\vec{AB} \begin{pmatrix} \frac{9}{2} - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{AB} \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 0^2 + 0^2} = \frac{9}{2}$

Donc on a Aire $_{ABC} = \frac{\frac{9}{2} \times 3}{2} = \frac{27}{4} \text{ cm}^2 = 6,75 \text{ m}^2$

[2] [a] Les trois points A, B et C ne sont pas alignés et ils forment donc un plan pour lequel les trois points ont chacun la coordonnée $z = 0$.

Donc l'équation du plan (ABC) est bien $z = 0$.

[b] On commence par vérifier que $H \in (ABC) \rightarrow$ ce qui est vrai car on a $z_H = 0$ et le point H vérifie l'équation du plan.

Ensuite, on doit vérifier que $\vec{DH}$ est orthogonal à (ABC) , c'est à dire à deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, non colinéaires, de (ABC) .

on a $\vec{DH} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \\ 1 - 1 \\ 0 - 3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{DH} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

et on calcule $\vec{DH} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times \frac{9}{2} + 0 \times 0 + (-3) \times 0 = 0$
soit $\vec{DH} \perp \vec{AB}$

$$\vec{DH} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times \frac{3}{4} + 0 \times 3 + (-3) \times 0 = \boxed{0} \text{ soit } \vec{DH} \perp \vec{AC}.$$

Donc les 2 conditions sont bien vérifiées et H est bien le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

[3] en prenant ABC comme base de ce tétraèdre, la hauteur associée sera [DH] et on aura :

$$V_{\text{module}} = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times DH = \frac{1}{3} \times 6,75 \times DH$$

$$\text{avec } DH = \|\vec{DH}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\text{on obtient } V_{\text{module}} = \frac{1}{3} \times 6,75 \times 3 = \boxed{6,75 \text{ m}^3}$$

Partie B

[1] a) on a $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{BD} = \begin{pmatrix} 3/2 - 3/2 \\ 1 - 0 \\ 3 - 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{BD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

et, $\vec{BC}$ et $\vec{BD}$ ne sont clairement pas colinéaires.

$$\text{on calcule } \vec{n} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3/4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \times (-\frac{3}{4}) + 3 \times 3 + 3 \times 0 = \boxed{0} \rightarrow \vec{n} \perp \vec{BC}$$

$$\text{et } \vec{n} \cdot \vec{BD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times (-3) + 3 \times 1 + 3 \times 3 = \boxed{0} \rightarrow \vec{n} \perp \vec{BD}.$$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (BCD)

Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

[b] Les coordonnées de $\vec{n}$ vont donc correspondre aux coefficients a, b et c de l'équation cartésienne du plan.

$$\text{On aura donc : } 4x + 3y + 3z + d = 0$$

$$\text{or on a } B \in (BCD) \rightarrow 4 \times \frac{3}{2} + 3 \times 0 + 3 \times 0 + d = 0 \rightarrow 18 + d = 0 \rightarrow d = -18$$

$\xrightarrow{x_B} \quad \xrightarrow{y_B} \quad \xrightarrow{z_B}$

$$\text{on obtient donc pour (BCD) l'équation } \boxed{4x + 3y + 3z - 18 = 0}$$

[c] Le vecteur $\vec{n}$ sera un vecteur directeur de cette droite Δ .

$$\text{on obtient donc } \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{soit } \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$\xrightarrow{\text{point D}} \quad \xrightarrow{\text{vecteur } \vec{n} \text{ qui sera directeur pour } \Delta}$

[2] le plan (ABC) a pour équation cartésienne $z=0$
et avec la représentation paramétrique de Δ , on obtient:

$$3+3t=0 \text{ soit } t = -\frac{3}{3} = -1$$

et le point L aura comme coordonnées
$$\begin{pmatrix} x = \frac{3}{2} + 4 \times (-1) = -\frac{5}{2} \\ y = 1 + 3 \times (-1) = -2 \\ z = 3 + 3 \times (-1) = 0 \end{pmatrix}$$

[3] on va calculer le produit scalaire $\vec{DL} \cdot \vec{DH}$.

avec $\vec{DL} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{DL} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{DH} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{DH} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

on a donc $\vec{DL} \cdot \vec{DH} = -4 \times 0 + (-3) \times 0 + (-3) \times (-3) = \boxed{9}$

et on sait que $\vec{DL} \cdot \vec{DH} = DL \times DH \times \cos(\widehat{LDH})$

avec $DL = \|\vec{DL}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$

et $DH = \|\vec{DH}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-3)^2} = 3$.

on en déduit $9 = \sqrt{34} \times 3 \times \cos(\widehat{LDH})$

$\vec{DL}, \vec{DH}$ $\uparrow$ $\uparrow$
 DL, DH

soit $\cos(\widehat{LDH}) = \frac{9}{\sqrt{34} \times 3} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\hookrightarrow \widehat{LDH} = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right) \approx \boxed{59,04^\circ} < 60^\circ$

et ce module est parfaitement adapté aux enfants.