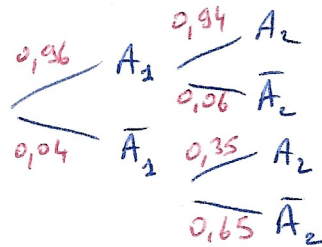


Exercice 2

Partie A ① on a l'arbre suivant



② avec la formule des probabilités totales, on obtient:

$$p(A_2) = p(A_1 \cap A_2) + p(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \\ = 0,96 \times 0,94 + 0,04 \times 0,35 = \boxed{0,9164}$$

③ on calcule $p_{A_2}(\bar{A}_1) = \frac{p(\bar{A}_1 \cap A_2)}{p(A_2)} = \frac{0,04 \times 0,35}{0,9164} \approx \boxed{0,0153}$

→ sachant que le message reçu par le deuxième relai était sans erreur, il y a (environ) 1,53% de chances que le message reçu par le premier relai était avec une erreur

Partie B

① a) on a $p(X=4) = \binom{50}{4} \times p^4 \times (1-p)^{50-4} = \binom{50}{4} \times 0,04^4 \times 0,96^{46}$
→ $p(X=4) \approx \boxed{0,09}$ ← résultat que l'on peut aussi obtenir directement.

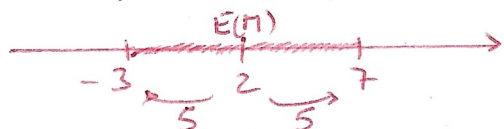
b) on cherche $p(X \geq 1)$ et on peut utiliser $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$
→ on obtient $p(X \geq 1) \approx \boxed{0,67}$

c) on sait que $E(X) = n \times p = 50 \times 0,04 = \boxed{2}$ tests positifs.
et $V(X) = n \times p \times (1-p) = 50 \times 0,04 \times (1-0,04) = \boxed{1,92}$

② a) on a $E(M) = E\left(\frac{X_1 + \dots + X_{25}}{25}\right) = \frac{1}{25} (E(X_1) + \dots + E(X_{25}))$
linéarité de l'espérance
 $= \frac{1}{25} \times 25 \times 2 = \boxed{2}$

et on a $V(M) = V\left(\frac{X_1 + \dots + X_{25}}{25}\right) = \frac{1}{25^2} (V(X_1) + \dots + V(X_{25}))$
les variables sont indépendantes *on ne peut pas oublier!*
 $= \frac{1}{25^2} \times 25 \times 1,92 = \boxed{0,0768}$

b) on sait que $-3 \leq M \leq 7$ correspond à $|M - 2| \leq 5$
c'est à dire $|M - E(M)| \leq 5$



on applique l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev,

$$P(|M - E(M)| \geq 5) \leq \frac{V(M)}{5^2}$$

$= 2$

et, puisque $P(|n - E(n)| \geq 5) = 1 - P(|n - E(n)| < 5)$,

on obtient $1 - P(|n - E(n)| < 5) \leq \frac{0,0768}{5^2}$

$$\text{soit } P(|n - E(n)| < 5) \geq 1 - \frac{0,0768}{5^2} \boxed{> 0,99} \\ \approx 0,9968$$

Partie C

① initialisation on a $p_1 = \boxed{0,96}$ et $p_2 = 0,59 \times p_1 + 0,35$
 $= 0,59 \times 0,96 + 0,35 = \boxed{0,9164}$

et on a bien $\boxed{p_2 \leq p_1}$

Hérédité on suppose que $\boxed{p_{n+1} \leq p_n}$

on obtient $0,59 p_{n+1} \leq 0,59 p_n$

soit $0,59 p_{n+1} + 0,35 \leq 0,59 p_n + 0,35$

soit $\boxed{p_{n+2} \leq p_{n+1}}$

et, d'après le principe de récurrence, la propriété " $p_{n+1} \leq p_n$ " est donc vérifiée pour tout $n \geq 1$.

② La suite (p_n) est donc décroissante (car $p_{n+1} \leq p_n$) et elle est, de façon évidente, à valeurs positives ($p_n \geq 0$) c'est à dire minorée par 0.

Donc, avec le Théorème de la convergence monotone, on peut conclure que (p_n) est bien convergente.

③ on a (p_n) convergente et $p_{n+2} = 0,59 p_n + 0,35$.

Donc, par passage à la limite, la limite l de (p_n) va vérifier l'égalité suivante: $l = 0,59 l + 0,35$

soit $0,41 l = 0,35$

soit $l = \frac{0,35}{0,41} = \boxed{\frac{35}{41}} \approx 0,854$