BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le sujet est constitué de quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (5 points)

La fédération internationale d'escrime établit des normes de fabrication sur les lames des armes des tireurs afin de garantir au maximum leur sécurité.
Pour tester la conformité de l'acier employé, la lame est pliée puis redressée toutes les secondes jusqu'à la rupture. La lame est conforme si la rupture intervient après plus de cinq heures de test.

Un équipementier d'escrime se fournit auprès de trois fabricants de lames. Son stock est composé de $60\,\%$ de lames du fournisseur A, de $12\,\%$ de lames du fournisseur B, le reste venant du fournisseur C.

Une étude qualité a montré que :

- $90\,\%$ des lames du fournisseur A étaient conformes ;
- $95\,\%$ des lames du fournisseur B étaient conformes ;
- $85\,\%$ des lames du fournisseur C étaient conformes.

Partie A

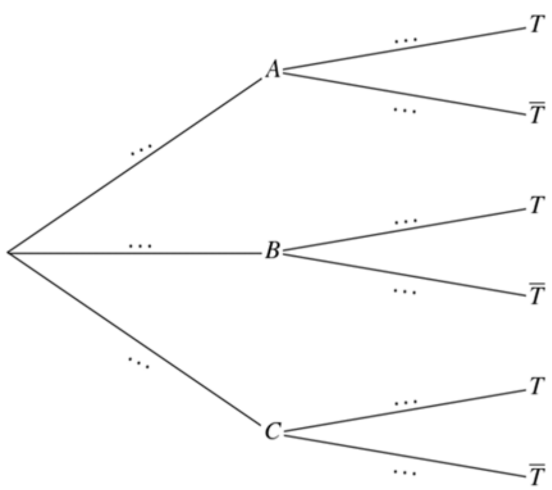
Un contrôle est déclenché sur une des lames vendues par l'équipementier.

On considère les événements suivants :

- A : « La lame testée provient du fournisseur A » ;
- B : « La lame testée provient du fournisseur B » ;
- C : « La lame testée provient du fournisseur C » ;
- T : « La lame testée est conforme ».

On note $\overline{T}$ l'événement contraire de T.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous représentant la situation.



2. Déterminer $P(A \cap \overline{T})$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Démontrer que la probabilité que la lame testée soit conforme est de $0,892$.

4. Sachant que la lame testée n'est pas conforme, déterminer la probabilité qu'elle provienne du fournisseur B. *On donnera la valeur arrondie au millième.*

Partie B

D'après la **partie A**, la probabilité qu'une lame de l'équipementier ne soit pas conforme est égale à $0,108$.
Lors d'une compétition d'escrime, l'équipementier apporte un échantillon de 75 lames provenant de son stock. On considère qu'il les a choisies au hasard et de manière indépendante. De plus son stock de lames est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de lames non conformes dans cet échantillon.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité que 6 lames exactement soient non conformes dans cet échantillon. *On arrondira le résultat au millième.*

3. L'équipementier affirme que la probabilité qu'il y ait strictement plus de 8 lames non conformes dans cet échantillon est inférieure à 50 %. A-t-il raison ?

Partie C

Soit n un entier strictement positif désignant le nombre de compétitions durant lesquelles l'équipementier est présent.
Il apporte à chaque fois un échantillon de 75 lames. Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$, que l'on considère indépendantes, donnent pour chaque échantillon le nombre de lames non conformes.
On pose $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

1. Déterminer l'espérance $E(M_n)$ et la variance $V(M_n)$ de la variable aléatoire M_n.

2. Justifier l'inégalité suivante, pour tout entier naturel n non nul :
$$P(|M_n - 8,1| \geq 2) \leq \frac{1,8063}{n} .$$

3. Déterminer une valeur de l'entier n à partir de laquelle $P(|M_n - 8,1| < 2) \geq 0,95$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. On considère l'équation différentielle suivante où y est une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$(E) : \quad y' + y = 2\cos(x) .$$

   AFFIRMATION 1 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4\mathrm{e}^{-x} + \cos(x) + \sin(x)$ est solution de l'équation différentielle (E).

2. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ et $g(x) = \sin(x)$.
   On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère et $\mathcal{C}_g$ celle de la fonction g.

   AFFIRMATION 2 : Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un seul point d'intersection.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{2n + \sin(n)}{n + 1} .$$

   AFFIRMATION 3 : La suite (v_n) diverge.

4. On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1 .$$

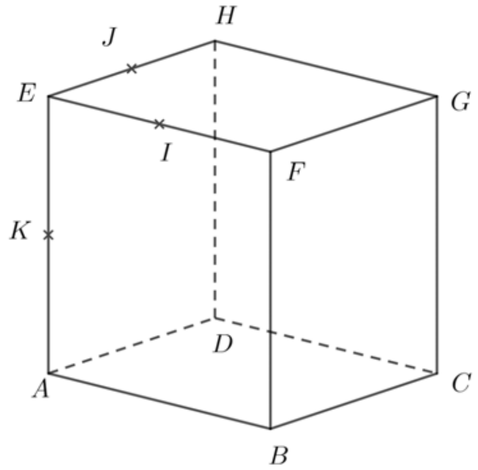
   AFFIRMATION 4 : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 on a $u_n = n^2$.

5. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \mathrm{e}^{-n}$.
   On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

   AFFIRMATION 5 : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$

Exercice 3 (4 points)

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormal $(A\,; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
Soit I le milieu du segment $[EF]$, J le milieu de $[EH]$ et K le milieu de $[AE]$.

1. Donner les coordonnées des points I, J et K.

2. a. Déterminer la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}$.
   b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$ arrondie au dixième de degré.

3. a. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{KC}$ est un vecteur normal au plan (AIJ).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (AIJ) est $x + y - \frac{1}{2}z = 0$.

4. Soit L le projeté orthogonal du point C sur le plan (AIJ).
   a. Déterminer les coordonnées du point L.
   b. En déduire que la distance du point C au plan (AIJ) est égale à $\frac{4}{3}$.

5. Soit M un point de la droite (FG).
   On admet que les coordonnées de M sont $(1; m\,; 1)$ avec m appartenant à $\mathbb{R}$.
   a. Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IM) est

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \\ y = ms \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}$$

   b. Peut-on affirmer que les droites (IM) et (KC) sont coplanaires quelle que soit la valeur de m ?

EXERCICE 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

1. a. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0; +\infty[$.
   b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Pour tout réel strictement positif x, démontrer que $f'(x) = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs exactes des éventuels extremums de la fonction.

4. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ, tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

5. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, on a $f''(x) = \frac{-5+6\ln(x)}{x^4}$.

6. a. Étudier la convexité de la fonction f en précisant les coordonnées des éventuels points d'inflexion.
   b. En déduire que, pour tout réel x appartenant à $\left]0 \,;\, \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$, on a $x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}$.

7. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $\left[\mathrm{e}^{\frac{5}{6}} \,;\, +\infty\right[$, on a aussi $x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}$.

Partie B

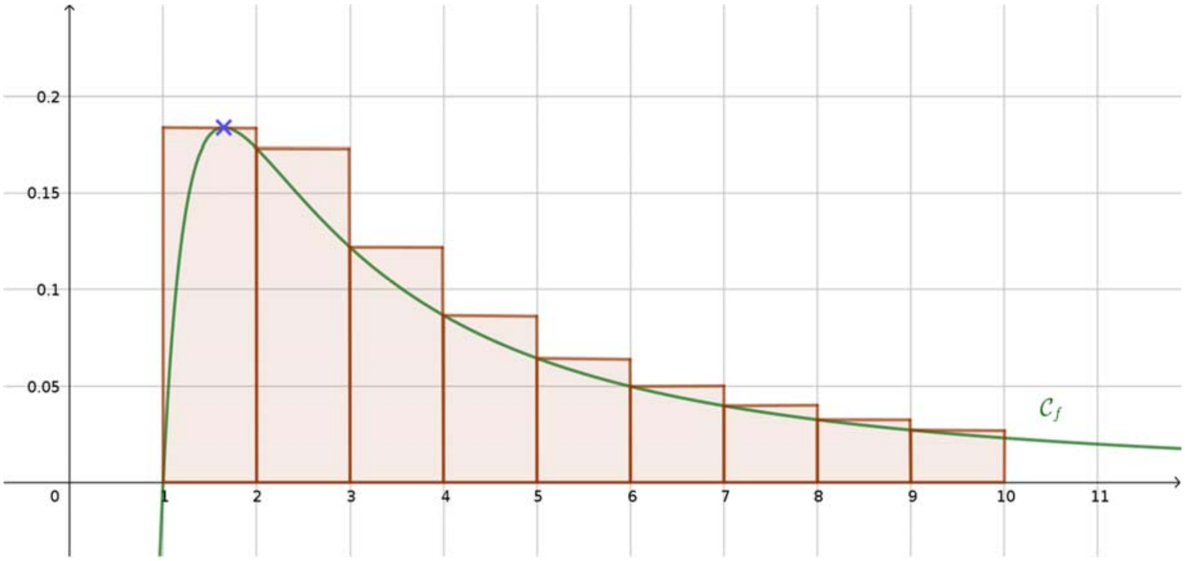
On considère la suite (I_n) définie, pour tout entier naturel non nul n, par :

$$I_n = \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

1. Donner une interprétation graphique de I_n pour n un entier naturel non nul.

2. Démontrer que la suite (I_n) est croissante.

3. On souhaite calculer une approximation de $\int_1^{10} f(x)\mathrm{d}x$ en déterminant la somme des aires des rectangles tracés dans le graphique ci-dessous.



Pour cela, on utilise le script suivant, écrit en langage Python.

```
from math import *

S=1/(2*exp(1))
for i in range (2,10):
     S = …
print(S)
```

Recopier et compléter ce script afin qu'il réponde au problème posé.

4. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$I_n = \frac{n-1-\ln(n)}{n}$$

5. Calculer la limite de la suite (I_n) quand n tend vers $+\infty$.