Version "brouillon"

Exercice 4

① ⓐ $g(x) = \overbrace{x}^{u} \times \overbrace{\cos(x)}^{v} - \sin x$

$\to g'(x) = \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{\cos x}_{v} + \underbrace{x}_{u} \times \underbrace{(-\sin x)}_{v'} - \cos x = \cancel{\cos x} - x\sin x - \cancel{\cos x}$

$= \boxed{-x\sin x}$

ⓑ $(-x)$ est négatif sur $[0 ; 2\pi]$

$\sin x$ est positif sur $[0 ; \pi]$ et négatif sur $[\pi ; 2\pi]$

On a donc :

x	0		π		2π
$-x$		$-$		$-$	
$\sin x$		$+$	0	$-$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	0	↘	$-\pi$	↗	2π

$f(0) = 0 \times \cos(0) - \sin(0)$
$= \boxed{0}$

$f(\pi) = \pi \times \cos(\pi) - \sin(\pi)$
$= \pi \times (-1) - 0$
$= \boxed{-\pi}$

$f(2\pi) = 2\pi \times \cos(2\pi) - \sin(2\pi)$
$= 2\pi \times 1 - 0$
$= \boxed{2\pi}$

ⓒ corollaire du TVI sur $[\pi ; 2\pi]$ avec f croissante et continue sur $[\pi ; 2\pi]$ et avec $f(\pi) = \boxed{-\pi}$
$f(2\pi) = \boxed{2\pi}$

et on a bien $0 \in [-\pi ; 2\pi]$

ⓓ

x	0		α		2π
signes de $g(x)$	0	$-$	0	$+$	

② ⓐ on a $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \left(\dfrac{u}{v}\right) \to f'(x) = \dfrac{\overbrace{\cos x}^{u'} \times \overbrace{x}^{v} - \overbrace{\sin x}^{u} \times \overbrace{1}^{v'}}{x^2 \; v^2}$

soit $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \boxed{\dfrac{g(x)}{x^2}}$

b) c) on en déduit le signe de f' et les variations de f.

x	0		α		2π
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	
x^2	||	$+$	|	$+$	
signes de $f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
variations de f	||	$\searrow$		$\nearrow$	

← voir question 1) d)

d) on considère $i(x) = \sin x$

↳ on a $i'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{i(0+h) - i(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h) - 0}{h}$

sin(0+h)   sin(0)

et on a donc $i'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(h)}{h}$

or on a $i(x) = \sin(x) \rightarrow i'(x) = \cos(x)$

et $i'(0) = \cos(0) = \boxed{1}$

↳ on en déduit $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = \boxed{1} \rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \boxed{1}$

3) sur $]0;\alpha[$, la fonction f est strictement décroissante

or on a $\pi < \alpha$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0;\pi[$

Donc si on a $0 < r < s < \pi$

alors on aura $f(r) > f(s)$

soit $\dfrac{\sin(r)}{r} > \dfrac{\sin(s)}{s}$

et les valeurs étant toutes positives,

on en déduit $\dfrac{\sin(r)}{\sin(s)} > \dfrac{r}{s}$

ou $\dfrac{r}{s} < \dfrac{\sin(r)}{\sin(s)}$