Exercice 3

Partie A $\boxed{1}$ on sait que $(\ln u)' = \frac{1}{u} \times u' = \frac{u'}{u}$.

on a ici $f(x) = \ln(\underbrace{3x^2+2x}_{u}) \rightarrow f'(x) = \frac{6x+2}{3x^2+2x}$ $\frac{u'}{u}$

$\rightarrow$ de façon évidente, $f'(x) > 0$ sur $[2;+\infty[$

et la fonction f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$

$\boxed{2}$ $\boxed{a}$ on a $g(2) = f(2) - 2 = \ln(3\times 2^2 + 2\times 2) - 2 = \ln(16) - 2 \approx 0{,}77$

Donc la fonction g est strictement décroissante et continue sur $[2;+\infty[$

on a $g(2) = \ln(16) - 2 \approx \boxed{0{,}77}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \boxed{-\infty}$

et on a bien $0 \in]-\infty ; \ln(16)-2]$

D'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x)=0$ a une unique solution α sur $[2;+\infty[$.

$\boxed{b}$ on obtient, avec la calculatrice, $4{,}04 < \alpha < 4{,}05$

et on pourra donner ici $\boxed{\alpha \approx 4{,}05}$

$\boxed{c}$ on en déduit le tableau de signes de g (qui est décroissante).

x	2	α	$+\infty$
signes de $g(x)$	+	0	−

Partie B

$\boxed{1}$ on notera que l'on $a_{n+1} = f(a_n)$

initialisation on nous donne directement $2 \leq a_0 \leq \alpha$

et la propriété est donc vérifiée au rang n

hérédité on suppose $2 \leq a_n \leq \alpha$

et on applique la fonction f qui est croissante et qui conserve l'ordre sur $[2;+\infty[$

on obtient $f(2) \leq f(a_n) \leq f(\alpha)$

$f(2) = \ln(16) \approx 2{,}8$ on sait que $h(\alpha) = 0$

soit $f(\alpha) - \alpha = 0$

soit $f(\alpha) = 0$

c'est à dire $(2 \leq)\ln(16) \leq a_{n+1} \leq \alpha$

Donc la propriété reste vérifiée au rang $(n+1)$ et, d'après le principe de récurrence, elle sera vraie pour tout n.

2) Avec son tableau de signes, on sait que g sera positive sur $[2 ; \alpha]$ et on a ici $a_n \in [2 ; \alpha]$.
On en déduit $g(a_n) \geq 0 \rightarrow f(a_n) - a_n \geq 0$
soit $a_{n+1} - a_n \geq 0 \rightarrow a_{n+1} \geq a_n$

Donc la suite (a_n) est bien $\boxed{\text{croissante}}$
et

3) on sait, de plus, que (a_n) est $\boxed{\text{majorée}}$ (car $a_n \leq \alpha$) et, avec le théorème de la convergence monotone, on en déduit que la suite (a_n) converge.

4) on a $a_{n+1} = f(a_n)$ avec (a_n) convergente et f continue
Donc, avec le théorème du point fixe, la limite ℓ de (a_n) va vérifier l'équation $f(\ell) = \ell$ c'est à dire $g(\ell) = 0$.
$\rightarrow$ la limite ℓ de la suite (a_n) correspond bien à $\boxed{\alpha}$.

Partie C

1) avec $a_0 = 2$ et la partie B, on sait que (a_n) est croissante et converge vers α.
et on nous donne (b_n) suite décroissante convergeant vers α
On aura donc : $a_n \leq \alpha$ et $b_n \geq \alpha$ pour tout n
soit $a_n \leq \alpha \leq b_n$ ou directement $\boxed{a_n \leq b_n}$, pour tout n

2) Le script effectuera ici ses instructions tant que la différence entre les termes b_n et a_n est supérieure à 10^{-p} (ce qui donnera ici $10^{-2} = 0{,}01$ avec algo(2))

a) Avec la calculatrice, on obtient :
$n = 9$ $\quad a \approx 4{,}044$ (cela correspond à a_9)

b) avec la valeur de a_9, on a une valeur approchée de α à 10^{-2} près (soit à $0{,}01$ près).
soit $\boxed{\alpha \approx 4{,}05}$ (car (a_n) est croissante et que l'on a $a_9 \approx 4{,}044$ $\rightarrow$ donc $\alpha > 4{,}044$!)