Exercice 4

Partie A Le signe de f'' donnera la concavité de f
Le signe de f' donnera les variations de f
Donc C_1 correspond à f
C_3 correspond à f'
C_2 correspond à f''

Partie B ① on calcule $g'(x)+g(x)$ et on vérifie que le résultat est bien égal à $(2x-3)e^{-x}$.

↳ on a $g(x) = \underbrace{(x^2-3x)}_{u}\times\underbrace{e^{-x}}_{v}$

et on obtient $g'(x) = \underbrace{(2x-3)}_{u'}\times\underbrace{e^{-x}}_{v} + \underbrace{(x^2-3x)}_{u}\times\underbrace{(-e^{-x})}_{v'}$

$$= e^{-x}\left(2x-3-(x^2-3x)\right)$$
$$= e^{-x}\left(2x-3-x^2+3x\right)$$
$$= e^{-x}\left(-x^2+5x-3\right)$$

et donc $g'(x)+g(x) = e^{-x}(-x^2+5x-3)+(x^2-3x)e^{-x}$

$$= e^{-x}\left(\cancel{-x^2}+5x-3\cancel{+x^2}-3x\right)$$
$$= e^{-x}(2x-3) \rightarrow \boxed{OK}.$$

② $y'+y=0 \rightarrow y'=-y \rightarrow y(x)=Ce^{-x}$, avec $C\in\mathbb{R}$

③ L'ensemble des solutions de (E) est obtenu en faisant la somme d'une solution particulière de (E) (→ voir ①) et de la solution générale de $y'+y=0$ (→ voir ②)

on obtient $x \rightarrow Ce^{-x}+(x^2-3x)e^{-x}$, avec $C\in\mathbb{R}$

ou $x \rightarrow e^{-x}(x^2-3x+C)$, avec $C\in\mathbb{R}$

④ on cherche $f(x)=Ce^{-x}+(x^2-3x)e^{-x}$

avec $f(0)=2$ soit $C\underbrace{e^{-0}}_{1}+\underbrace{(0^2-3\times 0)e^{-0}}_{0\times 1}=2$

on obtient $C=2$ et donc $f(x)=2e^{-x}+(x^2-3x)e^{-x}$

$$= e^{-x}(x^2-3x+2)$$

Partie C

(1) on a $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

et $(x^2 - 3x + 2)$ est un trinôme qui a deux racines 1 et 2

$a = 1$ (positif) donc courbe $\cup$ et signes $(+ 0 - 0 +)$

on en déduit :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
signes de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(2) en $-\infty$, on a $\underbrace{e^{-x}}_{+\infty}(\underbrace{x^2}_{+\infty} \underbrace{- 3x}_{+\infty} + 2) \longrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

en $+\infty$, on a $e^{-x}(x^2 - 3x + 2) = \underbrace{e^{-x} \times x^2}_{\to 0} - \underbrace{3x e^{-x}}_{\to 0} + \underbrace{2e^{-x}}_{\to 0}$

(croissances comparées)

$\longrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{0}$

(3) (a) on a $I = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{e^{-x}}_{v'} \underbrace{(x^2 - 3x + 2)}_{u} dx$

$= \left[\underbrace{-e^{-x}}_{v} \underbrace{(x^2 - 3x + 2)}_{u}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \underbrace{-e^{-x}}_{v} \times \underbrace{(2x - 3)}_{u'} dx$

$\longrightarrow I = (-e^{-1}\underbrace{(1^2 - 3 \times 1 + 2)}_{= 0} - (\underbrace{-e^{-0}}_{= -1}\underbrace{(0^2 - 3 \times 0 + 2)}_{= 2})) + \displaystyle\int_0^1 e^{-x}(2x - 3) dx$

$\longrightarrow I = 2 + \displaystyle\int_0^1 e^{-x}(2x - 3) dx$

on note $J = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{e^{-x}}_{v'} \underbrace{(2x - 3)}_{u} dx = \left[\underbrace{-e^{-x}}_{v}\underbrace{(2x - 3)}_{u}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \underbrace{-e^{-x}}_{v} \times \underbrace{2}_{u'} dx$

$\hookrightarrow J = (-e^{-1}(2 \times 1 - 3) - (-e^{-0}(2 \times 0 - 3)) + 2\displaystyle\int_0^1 e^{-x} dx$

$= e^{-1} - 3 + 2\left[-e^{-x}\right]_0^1$

$= e^{-1} - 3 + 2(-e^{-1} - (-e^{-0}))$

$= e^{-1} - 3 + 2(-e^{-1} + 1)$

$= e^{-1} - 3 - 2e^{-1} + 2 = -1 - e^{-1}$

On obtient donc $I = 2 - 1 - e^{-1} = 1 - e^{-1} = 1 - \dfrac{1}{e}$

b) La fonction étant positive sur $[0;1]$, l'intégrale I va représenter l'aire "sous la courbe", c'est à dire l'aire entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites verticales d'équation $x=0$ et $x=1$.

Partie D

1) L'équation de (T_a) s'écrira : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

avec $f(x) = e^{-x}(x^2-3x+2)$

$$f'(x) = -e^{-x}(x^2-3x+2) + e^{-x}(2x-3)$$
$$= e^{-x}(-x^2+3x-2+2x-3)$$
$$= e^{-x}(-x^2+5x-5)$$

On obtient (T_a) : $y = e^{-a}(-a^2+5a-5)(x-a) + e^{-a}(a^2-3a+2)$

L'intersection avec l'axe des ordonnées correspond à $x=0$

↳ on obtient $y = e^{-a}(-a^2+5a-5)(-a) + e^{-a}(a^2-3a+2)$
$$= e^{-a}(a^3-5a^2+5a+a^2-3a+2)$$
$$= e^{-a}(a^3-4a^2+2a+2)$$

2) on résout $e^{-a}(a^3-4a^2+2a+2) = 0$

$e^{-a} = 0$ impossible

↳ $a^3-4a^2+2a+2=0$

il y a un vrai raisonnement très long à faire ! c'est une "surprise" en fin d'épreuve !

On considère la fonction $h(x) = x^3-4x^2+2x+2$

↳ on a $h'(x) = 3x^2-8x+2$

on résout $h'(x)=0$ → $\Delta = 40 > 0$ → 2 racines

$$x_1 = \frac{8-\sqrt{40}}{6} \approx 0{,}279 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8+\sqrt{40}}{6} \approx 2{,}387$$

on en déduit le tableau

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $h'(x)$		+	0	−	0	+	
variation de h	$-\infty$	↗	$\approx 2{,}3$	↘	$-2{,}4$	↗	$+\infty$

On constate que l'équation $h(x)=0$ a donc 3 solutions sur $\mathbb{R}$

(est-il vraiment nécessaire d'appliquer trois fois le corollaire du TVI ? je ne pense pas ici...)

↳ il y a exactement 3 tangentes à $\mathcal{C}_f$ qui passent par l'origine.