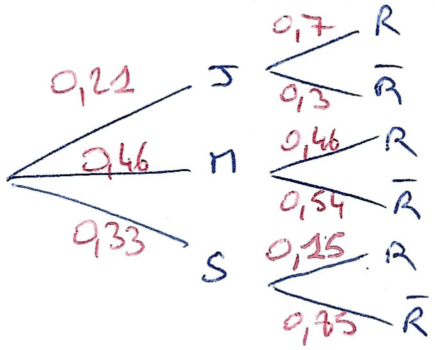
Exercice 2

Partie A

① on a l'arbre suivant



② on a $p(M \cap R) = p(M) \times p_M(R)$
$= 0,46 \times 0,46 = \boxed{0,212}$

→ c'est la probabilité d'avoir une personne entre 30 et 59 ans ayant déjà publié sur ce réseau social.

③ ⓐ on s'intéresse ici à $p(R)$ et on utilise la formule des probabilités totales → $p(R) = p(J \cap R) + p(M \cap R) + p(S \cap R)$
$= 0,21 \times 0,7 + 0,46 \times 0,46 + 0,33 \times 0,15$
$\approx \boxed{0,408}$

ⓑ on cherche $p_R(S) = \dfrac{p(R \cap S)}{p(R)} = \dfrac{0,33 \times 0,15}{0,408} \approx \boxed{0,121}$

Partie B

① on aura ici $\boxed{n = 100}$ et $\boxed{p = p(R) = 0,41}$

② on s'intéresse ici à $p(X \geq 50)$ → avec NUMWORKS
↳ on obtient directement $p(X \geq 50) \approx \boxed{0,043}$
ou on utilise $1 - p(X \leq 49) \approx 1 - 0,957 \approx \boxed{0,043}$
← avec TI83

③ on a $E(X) = n \times p = 100 \times 0,41 = \boxed{41}$ personnes.
→ cela signifie que, sur un échantillon de 100 personnes, on peut "espérer" avoir en moyenne 41 personnes ayant déjà publié sur ce réseau social.

Partie C

on doit reconnaître ici une application de l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev.

on commence donc par calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

↳ on a $E(Y) = E\left(\dfrac{X_1 + \dots + X_{150}}{150}\right) = \dfrac{1}{150}\left(E(X_1) + \dots + E(X_{150})\right)$
↑ linéarité de l'espérance

avec $E(X_i) = 41$, pour tout i

on obtient $E(Y) = \dfrac{1}{150}(150 \times 41) = \boxed{41}$

et on a $V(Y) = V\left(\dfrac{X_1 + \dots + X_{150}}{150}\right) = \dfrac{1}{150^2}\left(V(X_1) + \dots + V(X_{150})\right)$

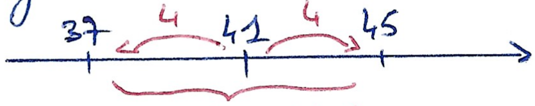
150^2 ← ne pas oublier !

les variables sont indépendantes

avec $V(Y_i) = np(1-p) = 100 \times 0{,}41 \times (1 - 0{,}41) = \boxed{24{,}19}$, pour tout i

on obtient $V(Y) = \dfrac{1}{150^2}(150 \times 24{,}19) = \boxed{\dfrac{24{,}19}{150}}$.

On remarque que $E(Y) = 41$ est parfaitement "centré" entre les valeurs 37 et 45 proposées →



$37 < Y < 45$

ou $|Y - \underset{(41)}{E(Y)}| < 4$

L'inégalité de Bienaymé - Tchebichev nous donne :

$$\underbrace{p(|Y - E(Y)| \geq 4)} \leq \frac{V(Y)}{4^2}.$$

soit $$1 - p(|Y - E(Y)| < 4) \leq \frac{V(Y)}{4^2}$$

c'est à dire $$p(|Y - E(Y)| < 4) \geq 1 - \frac{V(Y)}{4^2}$$

$$= 1 - \frac{\frac{24{,}19}{150}}{16}$$

$$\approx 0{,}9899$$

↳ on obtient bien $p(|Y - \underbrace{E(Y)}_{41}| < 4) \geq \underbrace{0{,}98}_{98\%}$.