Exercice 1

① on va montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

On a $\vec{AB}\begin{pmatrix}2-1\\1-0\\-1-3\end{pmatrix} \to \vec{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}1-1\\1-0\\1-3\end{pmatrix} \to \vec{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$

↳ on calcule $0:1=0$ et $1:1=1 \neq 0$

Donc il n'y a pas de proportionnalité entre les coordonnées

Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et les points A, B, C définissent un plan (car ils ne sont pas alignés).

② on doit vérifier que $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

on calcule $\vec{n}\cdot\vec{AB} = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix} = 4\times1+4\times1+2\times(-4) = \boxed{0} \to \boxed{\vec{n}\perp\vec{AB}}$

et $\vec{n}\cdot\vec{AC} = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} = 4\times0+4\times1+2\times(-2) = \boxed{0} \to \boxed{\vec{n}\perp\vec{AC}}$.

→ on a bien le résultat souhaité.

③ Les coordonnées du vecteur normal vont représenter les coefficients a, b et c de l'équation cartésienne du plan.

pour (ABC), on aura donc : $\underset{a}{4}x + \underset{b}{4}y + \underset{c}{2}z + d = 0$

et on utilise, par exemple, le point A.

On a $A \in (ABC) \to 4\times \underset{x_A}{1} + 4\times \underset{y_A}{0} + 2\times \underset{z_A}{3} + d = 0 \to 10 + d = 0$

$\to d = -10$.

on obtient donc pour (ABC) : $\boxed{4x+4y+2z-10=0}$

④ on remplace x, y et z par les coordonnées du point H

↳ on a bien $4\times \underset{x_H}{0} + 4\times \underset{y_H}{2} + 2\times \underset{z_H}{1} - 10 = \boxed{0} \to \boxed{H \in (ABC)}$

⑤ on a ici un raisonnement très classique.

on commence par calculer $\vec{AB}\cdot\vec{AH}$ avec les coordonnées.

on a $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{AH}\begin{pmatrix}0-1\\2-0\\1-3\end{pmatrix} \to \vec{AH}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$

↳ $\vec{AB}\cdot\vec{AH} = 1\times(-1)+1\times2+(-4)\times(-2) = \boxed{9}$

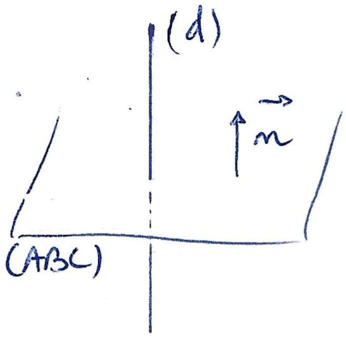
et on sait que $\vec{AB}\cdot\vec{AH} = AB \times AH \times \cos(\widehat{BAH})$

avec $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{1^2+1^2+(-4)^2} = \sqrt{18}$

$AH = \|\vec{AH}\| = \sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

On a donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = 9 = \sqrt{18} \times 3 \times \cos(\widehat{BAH})$

soit $\widehat{BAH} = \cos^{-1}\left(\dfrac{9}{\sqrt{18}\times 3}\right) = \boxed{45°}$



⑥ La droite (d) est orthogonale au plan (ABC).
Un vecteur directeur de (d) sera donc le vecteur $\vec{n}$ (normal au plan (ABC)).

On aura donc pour (d) $\begin{cases} x = \boxed{0} + \boxed{4} \times t \\ y = \boxed{2} + \boxed{4} \times t \\ z = \boxed{1} + \boxed{2} \times t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$

point H   vecteur directeur

$\boxed{\text{soit } \begin{cases} x = 4t \\ y = 2 + 4t \\ z = 1 + 2t \end{cases}}$

⑦ Le point H appartient à la droite (d) et au plan (ABC).
Ce point sera le projeté orthogonal du point S sur le plan (ABC).
Donc la distance entre S et (ABC) sera égale à SH.

On a $SH = \sqrt{(x_H - x_S)^2 + (y_H - y_S^2) + (z_H - z_S)^2}$

$= \sqrt{(0 - 4t)^2 + (2 - (2 + 4t))^2 + (1 - (1 + 2t))^2}$

car $S \in (d)$

on obtient $SH = \sqrt{(-4t)^2 + (-4t)^2 + (-2t)^2} = \sqrt{36t^2}$

or on veut $SH = 6 \rightarrow \sqrt{36t^2} = 6 \rightarrow 6|t| = 6$

valeur absolue car t peut être négatif.

↳ on en déduit $|t| = 1$ soit $t = \boxed{-1}$ ou $t = \boxed{1}$

mais l'énoncé nous demande d'avoir x_S positive.

On prend $t = 1$ et les coordonnées du point S sont alors :

$\begin{cases} x = 4 \times 1 \\ y = 2 + 4 \times 1 \\ z = 1 + 2 \times 1 \end{cases}$ soit $S\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.