Exercice 4

1 on utilise les formules générales $(u^5)' = 5u^4 \times u'$
et $(u^4)' = 4u^3 \times u'$.

on obtient $f'(x) = 5\left(-\frac{1}{2}x+3\right)^4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}x+3\right)^4$

et $f''(x) = -\frac{5}{\cancel{2}} \times \cancel{4} \times \left(-\frac{1}{2}x+3\right)^3 \times \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) = 5\left(-\frac{1}{2}x+3\right)^3$

or la fonction "cube" $\left(-\frac{1}{2}x+3\right)^3$ est du signe de la fonction affine $\left(-\frac{1}{2}x+3\right)$ qui sera du type $(+ \ 0 \ -)$

coefficient négatif

on a $f''(x) = 0 \iff -\frac{1}{2}x+3 = 0 \iff x = 6$ et on aura donc
$f''(x) \leq 0$ pour $x \geq 6$ → fonction CONCAVE pour $x \geq 6$

→ $\boxed{\text{FAUSSE}}$

2 Le nombre total de tirages est $\binom{32}{5} = \boxed{201\ 376}$.

On va maintenant dénombrer le nombre de tirages SANS multiple de 8

→ c'est comme si on enlevait les jetons 8; 16; 24 et 32 et que l'on tirait les 5 jetons parmi les 28 restants

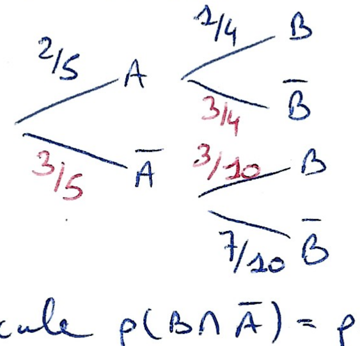
c'est à dire $\binom{28}{5} = \boxed{98\ 280}$

Donc le nombre de tirages avec au moins un multiple de 8 sera :

↳ nombre total $\boxed{-}$ nombre de tirages SANS multiple de 8

$= 201\ 376 \ \boxed{-} \ 98\ 280 = \boxed{103\ 096}$ → $\boxed{\text{VRAIE}}$

3 on commence en complétant l'arbre de probabilité



↳ on cherche $p_B(\bar{A}) = \frac{p(B \cap \bar{A})}{p(B)}$

on calcule $p(B \cap \bar{A}) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} = \boxed{\frac{9}{50}}$

et on utilise la formule des probabilités totales pour $p(B)$.

On obtient $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} = \boxed{\frac{14}{50}}$

On obtient : $p_B(\bar{A}) = \dfrac{\frac{9}{50}}{\frac{14}{50}} = \boxed{\dfrac{9}{14}} \neq \boxed{\dfrac{9}{50}} \rightarrow$ $\boxed{\text{FAUSSE}}$

$\boxed{4}$ On calcule $h'(x) + h(x)$ et on vérifie si le résultat obtenu correspond bien à l'expression $e^{-x}\cos x$.

On a $h(x) = \underbrace{e^{-x}}_{u} \times \underbrace{\sin(x)}_{v}$

et on obtient $h'(x) = \underbrace{-e^{-x}}_{u'} \times \underbrace{\sin(x)}_{v} + \underbrace{e^{-x}}_{u} \times \underbrace{\cos x}_{v'}$

On a donc $h'(x) + h(x) = \cancel{-e^{-x}\sin(x)} + e^{-x}\cos(x) + \cancel{e^{-x}\sin(x)}$

$= e^{-x}\cos(x) \longrightarrow$ $\boxed{\text{VRAIE}}$

$\boxed{5}$ L'affirmation précédente nous permet de connaitre une solution particulière de (E).

Il nous reste à déterminer les solutions générales de l'équation homogène $y' + y = 0$

c'est à dire $y' = -y$.

On obtient les fonctions de la forme $x \rightarrow Ce^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Par addition, on obtient les solutions de (E) :

$$\underbrace{Ce^{-x}}_{\text{solution générale de } y'+y=0} + \underbrace{e^{-x}\sin(x)}_{\text{solution particulière de (E)}}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

↳ et on obtient $\boxed{x \rightarrow e^{-x}(C + \sin(x))}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Les fonctions $x \rightarrow Ce^{-x}\sin(x)$ et $x \rightarrow e^{-x}(C + \sin(x))$ ne sont pas égales : par exemple, pour $x = 0$, on obtient comme résultat $\boxed{0}$ pour la première et $\boxed{C}$ pour la deuxième.

$\rightarrow$ l'affirmation est donc $\boxed{\text{FAUSSE}}$