Exercice 3

1) a) il faut montrer ici que les points A, B et C ne sont pas alignés.

on a $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1-1\\3-2\\1-3\end{pmatrix} \rightarrow \vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}2-1\\1-2\\6-3\end{pmatrix} \rightarrow \vec{AC}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$

on peut calculer, par exemple, $1:(-2) = -0{,}5$ et $-1:1 = -1 \neq -0{,}5$

Donc les coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés $\rightarrow$ ils définissent donc un plan.

b) on va montrer que $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ non colinéaires du plan (ABC).

on calcule $\vec{n}\cdot\vec{AB} = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix} = 1\times(-2) + 4\times 1 + 1\times(-2) = \boxed{0} \rightarrow \vec{n} \perp \vec{AB}$

et $\vec{n}\cdot\vec{AC} = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} = 1\times 1 + 4\times(-1) + 1\times 3 = \boxed{0} \rightarrow \vec{n} \perp \vec{AC}$

Donc $\vec{n}$ est bien un vecteur normal au plan (ABC)

c) Les coordonnées $(1;4;1)$ du vecteur $\vec{n}$ représentent alors les coefficients a, b et c de l'équation cartésienne du plan

$\rightarrow$ on obtient donc $\underset{a}{1}x + \underset{b}{4}y + \underset{c}{1}z + d = 0 \rightarrow \boxed{x+4y+z+d=0}$

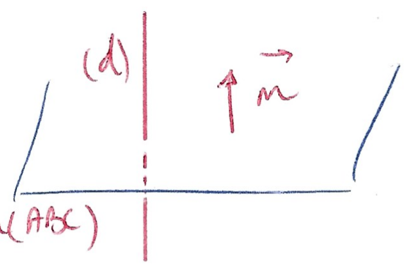
on utilise, par exemple, le point A qui appartient au plan (ABC)

$\rightarrow$ on a $\underset{x_A}{1} + 4\times\underset{y_A}{2} + \underset{z_A}{3} + d = 0 \rightarrow 12 + d = 0$

$\rightarrow d = -12$

On obtient donc pour le plan (ABC) : $\boxed{x+4y+z-12=0}$

2) a) La droite (d) aura un vecteur directeur qui va correspondre au vecteur normal $\vec{n}$ du plan (ABC).



on aura, pour (d) : $\begin{cases} x = \boxed{3} + \boxed{1}\times t \\ y = \boxed{-2} + \boxed{4}\times t \\ z = \boxed{-1} + \boxed{1}\times t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ soit $\boxed{\begin{cases} x = 3+t \\ y = -2+4t, \ t\in\mathbb{R} \\ z = -1+t \end{cases}}$

point D

vecteur directeur de (d)

b) ce point H représente en fait le point d'intersection de la droite (d) avec le plan (ABC).

$\rightarrow$ on "met" les coordonnées de l'équation paramétrique de la droite dans l'équation cartésienne du plan.

On a : $(3+t) + 4(-2+4t) + (-1+t) - 12 = 0$

$$18t - 18 = 0 \rightarrow t = \frac{18}{18} = \boxed{1}$$

Les coordonnées du point H sont donc $\begin{pmatrix} x = 3+1 \\ y = -2+4\times 1 \\ z = -1+1 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$

(c) Cette distance entre D et (ABC) est égale à DH.

On a $DH = \sqrt{(x_H - x_D)^2 + (y_H - y_D)^2 + (z_H - z_D)^2}$

$$= \sqrt{(4-3)^2 + (2-(-2))^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2}$$

On a donc $\boxed{DH = \sqrt{18}} \rightarrow \boxed{DH = 3\sqrt{2}}$

(3) (a) On sait que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

avec $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -2\times 1 + 1\times(-1) + (-2)\times 3 = -9$

$AB = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \boxed{\sqrt{9}}$ et $AC = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \boxed{\sqrt{11}}$

On en déduit $-9 = \underbrace{\sqrt{9}}_{=3} \times \sqrt{11} \times \cos(\widehat{BAC})$

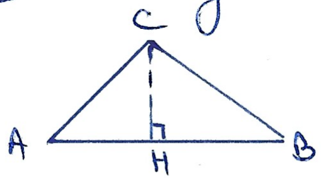
$\rightarrow$ on a donc $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{-9}{3\sqrt{11}} = -\frac{3}{\sqrt{11}} = \boxed{\frac{-3\sqrt{11}}{11}}$

(b) On utilise la relation $\cos^2(\widehat{BAC}) + \sin^2(\widehat{BAC}) = 1$

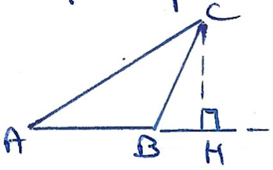
soit $\sin^2(\widehat{BAC}) = 1 - \left(-\frac{3\sqrt{11}}{11}\right)^2 = 1 - \frac{9}{11} = \frac{2}{11}$

$\rightarrow \boxed{\sin(\widehat{BAC}) = \sqrt{\frac{2}{11}}}$

(c) On va faire un croquis pour ce triangle ABC :



ou



dans les deux cas, on a un triangle AHC rectangle en H, et on a :

$\sin(\widehat{BAC}) = \frac{opp}{hyp} = \frac{CH}{AC}$

or on a $\text{Aire}_{ABC} = \frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2} = \frac{AB \times CH}{2} = \frac{\overset{AB}{3} \times \overset{AC}{\sqrt{11}} \times \sin(\widehat{BAC})}{2}$

$\rightarrow \text{Aire}_{ABC} = \frac{3 \times \sqrt{11} \times \sqrt{\frac{2}{11}}}{2} = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$ u.a.

(4) On peut prendre ABC comme base de la pyramide et la hauteur sera donc égale à DH.

↳ On a $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{ABC} \times DH = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = \boxed{3}$ u.v.