Exercice 1

Partie A

① on a $f'(x) = \dfrac{1\times(2x-3)-(x-2)\times 2}{(2x-3)^2} = \dfrac{2x-3-2x+4}{(2x-3)^2} = \dfrac{1}{(2x-3)^2}$

Donc on a $f'(x) > 0$ pour $x \in]-\infty ; \frac{3}{2}[$

Donc la fonction f est bien strictement croissante sur $]-\infty ; \frac{3}{2}[$

On va maintenant calculer les limites !

$\boxed{\text{en } -\infty}$, on a une forme indéterminée et on factorise par x.

↳ $f(x) = \dfrac{\cancel{x}(1-\frac{2}{x})}{\cancel{x}(2-\frac{3}{x})}$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{x} = 0$

et on obtient bien $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\boxed{\text{en } \frac{3}{2}^-}$, on a $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-} x-2 = -\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-} 2x-3 = 0^-$ ⚠

et, par quotient des limites, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

($\frac{\ell}{0}$ n'est pas une forme indéterminée pour les limites)

② La fonction f est donc strictement croissante sur $[0 ; 1]$

→ elle conserve donc l'ordre.

et si on part de $\boxed{0 \leq x \leq 1}$

on obtient $0 \leq \underbrace{f(0)}_{=\frac{2}{3}} \leq f(x) \leq \underbrace{f(1)}_{=1}$ soit $\boxed{0 \leq f(x) \leq 1}$

Partie B

② initialisation on a $U_0 = 0$ et $U_1 = \dfrac{0-2}{2\times 0-3} = \dfrac{2}{3}$

Donc on a bien $0 \leq U_0 \leq U_1 \leq 1$

hérédité on suppose $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1$

et on applique la fonction f strictement croissante sur $[0 ; 1]$ et qui conserve l'ordre.

on obtient $f(0) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(1)$

soit $(0 \leq)\ \frac{2}{3} \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 1$

↳ la propriété reste bien vérifiée au rang $(n+1)$

et, d'après le principe de récurrence, elle sera vraie pour tout n.

② La suite (U_n) est donc $\boxed{\text{croissante}}$ (car $U_n \leq U_{n+1}$) et elle est $\boxed{\text{majorée}}$ (car $U_n \leq 1$) → la suite (U_n) est donc $\boxed{\text{convergente}}$ d'après le théorème de la convergence monotone.

③ on résout directement $f(x) = x$ → $\dfrac{x-2}{2x-3} = x$

soit $x - 2 = x(2x-3)$ ou $2x^2 - 4x + 2 = 0$

cette équation n'a qu'une seule solution ($\Delta = 0$) égale à 1 → on obtient bien $\boxed{\ell = 1}$

④ cet algorithme s'arrêtera dès que $u \geq 1 - 0{,}0001$
soit $u \geq 0{,}9999$

Donc, à partir du rang $n = 5000$, on aura les termes de la suite (U_n) qui seront supérieurs ou égal à $0{,}9999$.

⑤ ⓐ on a $U_0 = \boxed{0}$ $U_1 = \boxed{\dfrac{2}{3}}$ $U_2 = \dfrac{\frac{2}{3} - 2}{2 \times \frac{2}{3} - 3} = \boxed{\dfrac{4}{5}}$ $U_3 = \dfrac{\frac{4}{5} - 2}{2 \times \frac{4}{5} - 3} = \boxed{\dfrac{6}{7}}$

ⓑ d'une façon assez évidente (si on ne cherche pas une expression trop compliquée), on suppose que $U_n = \dfrac{2n}{2n+1}$

on va démontrer cette conjecture par récurrence.

<u>initialisation</u> on calcule $U_0 = \dfrac{2 \times 0}{2 \times 0 + 1} = \boxed{0}$

Donc on a bien $U_0 = \boxed{0}$

<u>hérédité</u> on suppose $U_n = \dfrac{2n}{2n+1}$

montrons que $U_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{2(n+1)+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3}$

or on a $U_{n+1} = \dfrac{U_n - 2}{2U_n - 3} = \dfrac{\frac{2n}{2n+1} - 2}{2\left(\frac{2n}{2n+1}\right) - 3} = \dfrac{\frac{2n - 4n - 2}{\cancel{2n+1}}}{\frac{4n - 6n - 3}{\cancel{2n+1}}}$ $\qquad \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \dfrac{a}{c}$

on obtient $U_{n+1} = \dfrac{-2n-2}{-2n-3} = \dfrac{2n+2}{2n+3}$

→ on a bien le résultat voulu et, d'après le principe de récurrence, on a $\boxed{U_n = \dfrac{2n}{2n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.