Exercice 4

Partie A

1) Le nombre dérivé $f'(1)$ est égal au coefficient directeur de la tangente au point A d'abscisse 1.

on a $f'(1) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2-0}{0-1} = \dfrac{-2}{-1} = 2 \rightarrow \boxed{f'(1) = 2}$

2) Le point A semble être un point d'inflexion avec la fonction f qui deviendrait convexe sur $[1 ; +\infty[$.

$\rightarrow$ la fonction $\boxed{\text{n'est pas}}$ concave sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$.

3) $\boxed{f''(1) = 0}$ car le point A semble être un point d'inflexion.

Partie B 1) on a $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} (2x-1) = 0^+ \rightarrow \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} \ln(2x-1) = -\infty$

et, par produit, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} x\ln(2x-1) = \boxed{-\infty}$.

$\hookrightarrow$ La courbe $\mathcal{C}$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{1}{2}$.

2) on résout l'équation $x\ln(2x-1) = 0$ — on reconnait une équation produit nul.

$x = 0$ impossible sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$

$\ln(2x-1) = 0 \; (= \ln 1)$

$2x - 1 = 1$

$x = \frac{2}{2} = \boxed{1}$

$\rightarrow$ on obtient $S = \{1\}$

3) a) on a $(\ln(2x-1))' = \dfrac{1}{2x-1} \times 2 = \dfrac{2}{2x-1}$ — $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \times u'$

et on a $\left(\dfrac{2x}{2x-1}\right)' = \dfrac{\overset{u'}{2} \times \overset{v}{(2x-1)} - \overset{u}{2x} \times \overset{v'}{2}}{(2x-1)^2 \;/ v^2} = \dfrac{\cancel{4x} - 2 - \cancel{4x}}{(2x-1)^2} = \dfrac{-2}{(2x-1)^2}$

on obtient donc $f''(x) = \dfrac{2}{2x-1} + \dfrac{-2}{(2x-1)^2} = \dfrac{2(2x-1) - 2}{(2x-1)^2} = \dfrac{4x-4}{(2x-1)^2}$

soit $f''(x) = \dfrac{4(x-1)}{(2x-1)^2}$

b) on a, de façon évidente, $f''(x) \geq 0$ sur $[1 ; +\infty[$

et $f''(x) \leq 0$ sur $]\frac{1}{2} ; 1]$

avec $f''(1) = 0$

Donc la fonction f est concave sur $]\frac{1}{2};1]$ et convexe sur $[1;+\infty[$ avec un point d'inflexion au point A d'abscisse 1 (et ce point A correspond bien à l'intersection entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses).

4 a) sur $[1;2]$, on a $x \geq 1$ soit $2x \geq 2$ et $2x-1 \geq 1$
$\rightarrow \ln(2x-1) \geq 0$

Avec $x > 0$, on a bien $f(x) = x\ln(2x-1) \geq 0$ sur $[1;2]$

b) on a $\int_1^2 \frac{x^2}{x^2-1}dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{2}{2x-1}\right)dx$

$= \left[\frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\underbrace{\ln(2x-1)}_{\text{primitive de } \frac{2}{2x-1}}\right]_1^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2^2}{2} + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times \ln(2 \times 2-1) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1^2}{2} + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{8} \times \underbrace{\ln(2 \times 1-1)}_{=\ln(1)=0}\right)$

$= 1 + \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\ln(3) - \left(\cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} + 0\right) = \boxed{1 + \frac{1}{8}\ln(3)}$

c) La fonction f est positive sur $[1;2]$.

Donc on a $A = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \underbrace{x}_{u'} \times \underbrace{\ln(2x-1)}_{v} dx$

$= \left[\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u} \times \underbrace{\ln(2x-1)}_{v}\right]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\frac{x^2}{\cancel{2}}}_{u} \times \underbrace{\frac{\cancel{2}}{2x-1}}_{v'} dx$ c'est le résultat du b)

On obtient $A = \frac{2^2}{2} \times \ln(2 \times 2-1) - \frac{1^2}{2} \times \underbrace{\ln(2 \times 1-1)}_{=\ln(1)=0} - \left(1 + \frac{1}{8}\ln(3)\right)$

soit $A = 2\ln(3) - 1 - \frac{1}{8}\ln(3) = \boxed{\frac{15}{8}\ln(3) - 1}$ u.a.

Partie C

1) Le signe de $f_a''(x)$ ne dépend que du signe de $(ax-2)$.

On aura $ax-2=0$ pour $x = \frac{2}{a}$ et $ax-2>0$ pour $x > \frac{2}{a}$

Donc $f_a''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{a}$ $\rightarrow$ il y a aura un unique point d'inflexion pour $\mathcal{C}_a$ (la fonction f_a sera convexe sur $[\frac{2}{a};+\infty[$ et concave sur $]\frac{1}{a};\frac{2}{a}]$).

On calcule $f_a\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{2}{a} \times \ln\left(\cancel{a} \times \frac{2}{\cancel{a}} - 1\right) = \frac{2}{a} \times \ln(1) = 0$

$\rightarrow$ le point A_a aura pour coordonnées $\left(\frac{2}{a};0\right)$.

2) D'après les coordonnées $\left(\frac{2}{a};0\right)$, on sait que les points A_a appartiennent tous à l'axe des abscisses et ils seront donc alignés.