Exercice 3

$\boxed{1}$ on doit vérifier que $\overrightarrow{SA}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-2\\ \sqrt{2}-\sqrt{2}\\ 0-(-1)\end{pmatrix} \to \boxed{\overrightarrow{AB}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-2\\0-\sqrt{2}\\-1-(-1)\end{pmatrix} \to \boxed{\overrightarrow{AC}}\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$

et il est évident que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires
(on a $0:(-1)=0$ et $-\sqrt{2}:0=$ impossible !).

on a aussi $\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix}2-(-1)\\ \sqrt{2}-\sqrt{2}\\ -1-(-4)\end{pmatrix} \to \boxed{\overrightarrow{SA}}\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$

on calcule $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = 3\times(-1)+0\times0+3\times1=\boxed{0}$

et $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} = 3\times0+0\times(-\sqrt{2})+3\times0=\boxed{0}$

Donc on a bien $\overrightarrow{SA}\perp\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{SA}\perp\overrightarrow{AC}$

↳ $\overrightarrow{SA}$ est bien normal à (ABC) $\longrightarrow$ $\boxed{\text{VRAIE}}$

$\boxed{2}$ on a $\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix}1-(-1)\\ \sqrt{2}-\sqrt{2}\\ 0-(-4)\end{pmatrix} \to \overrightarrow{SB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$

et on obtient une représentation paramétrique de (SB).

$$(SB)\ \begin{cases} x=\boxed{1}+\boxed{2}\times k' \\ y=\boxed{\sqrt{2}}+\boxed{0}\times k' \\ z=\boxed{0}+\boxed{4}\times k' \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=1+2k' \\ y=\sqrt{2} \\ z=4k' \end{cases}$$

point B — vecteur $\overrightarrow{SB}$ directeur pour (SB)

on résout alors le système d'équations entre d et (SB)

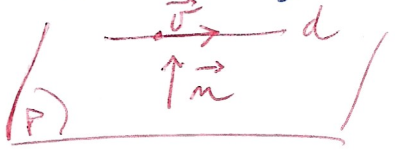
$$\begin{cases} 2-k=1+2k' \\ \sqrt{2}k=\sqrt{2} \\ -1-k=4k' \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2-1=1+2k' \\ k=1 \\ -1-1=4k' \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k'=\frac{0}{2}=0 \\ k=1 \\ k'=-\frac{2}{4}=-0{,}5 \end{cases}$$

Donc le système n'a pas de solutions car on obtient deux valeurs différentes pour le paramètre k'.

Donc les droites (SB) et d ne sont pas sécantes

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{FAUSSE}}$

3 La droite d sera parallèle au plan P si un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à un vecteur normal au plan P



Avec la représentation paramétrique de d, on a $\vec{v_d}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix}$

et avec l'équation cartésienne de P, on a $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$

On calcule $\vec{v_d}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} = (-1)\times 1+\sqrt{2}\times 0+(-1)\times(-1) = \boxed{0}$

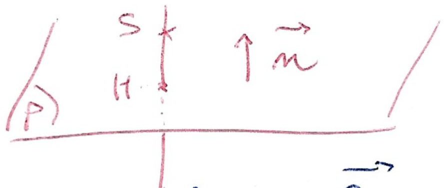
et on a bien $\vec{v_d}\perp\vec{n}$ → d est parallèle au plan P.

→ $\boxed{\text{VRAIE}}$

4 condition n° 1 : le point H appartient-il bien au plan P ?

→ on calcule $\underbrace{-3}_{x_H}-(\underbrace{-2}_{z_H})+1=\boxed{0}$ → $H\in P$.

condition n° 2 : le vecteur $\vec{SH}$ est-il bien orthogonal au plan P ?



on doit donc vérifier si $\vec{SH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

on a $\vec{SH}\begin{pmatrix}-3-(-1)\\ \sqrt{2}-\sqrt{2}\\ -2-(-4)\end{pmatrix}$ → $\vec{SH}\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$ et on a $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$

→ on constate que $\vec{SH}=-2\vec{n}$ et les vecteurs sont bien colinéaires.

<u>Donc</u> les deux conditions sont remplies et l'affirmation est $\boxed{\text{VRAIE}}$