Exercice 2

Partie A $\boxed{1}$ on peut directement connaître les solutions du type $y' = ay + b$ $\boxed{\text{ou}}$ on peut utiliser un résultat du cours sur la somme de la solution générale de l'équation homogène $y' = ay$ avec une solution particulière de (E).

on obtient $\left\{ t \to Ae^{-\frac{3}{10}t} + \frac{10}{3}, \text{ avec } A \in \mathbb{R} \right\}$

$\boxed{2}$ on aura $q(t) = Ae^{-\frac{3}{10}t} + \frac{10}{3}$ et $q(0) = 1$

soit $A\underbrace{e^{-\frac{3}{10}\times 0}}_{=1} + \frac{10}{3} = 1 \to A = 1 - \frac{10}{3} = -\frac{7}{3}$

on en déduit $\boxed{q(t) = -\frac{7}{3}e^{-\frac{3}{10}t} + \frac{10}{3}}$

$\boxed{3}$ on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(-\frac{3}{10}t\right) = -\infty \to \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{3}{10}t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} q(t) = \boxed{\frac{10}{3}}$

À terme, la quantité de médicament se rapprochera de $\frac{10}{3}$ mg.

$\boxed{4}$ on a $q(t) = -\frac{7}{3}e^{-\frac{3}{10}t} + \frac{10}{3} \to q'(t) = -\frac{7}{3}\times\left(-\frac{3}{10}e^{-\frac{3t}{10}}\right) = \frac{7}{10}e^{-\frac{3}{10}t}$

or on a $e^{-\frac{3}{10}t} > 0$ pour tout t $\to$ on a $q'(t) > 0$ pour tout t

et la fonction q est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

$\boxed{5}$ on va résoudre ici $q(t) \geq 3 \to -\frac{7}{3}e^{-\frac{3}{10}t} + \frac{10}{3} \geq 3$

on obtient $-\frac{7}{3}e^{-\frac{3}{10}t} \geq -\frac{1}{3}$ $\left(3 - \frac{10}{3}\right)$ soit $e^{-\frac{3}{10}t} \leq \frac{1}{7} \leftarrow \left(-\frac{1}{3}\right) : \left(-\frac{7}{3}\right)$

inversion avec la division par le nombre négatif $\left(-\frac{7}{3}\right)$

En appliquant la fonction ln qui est croissante (et qui conserve l'ordre), on obtient $\ln\left(e^{-\frac{3}{10}t}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{7}\right) = \ln(1) - \ln(7) = -\ln(7)$

soit $-\frac{3}{10}t \leq -\ln(7)$

soit $t \geq \frac{10\ln(7)}{3}$

nouvelle inversion avec la division par le nombre négatif $\left(-\frac{3}{10}\right)$.

on obtient un temps égal à $\frac{10\ln(7)}{3}$ h soit environ $\boxed{6{,}5 \text{ h}}$

$\boxed{6}$ Le traitement doit durer 7h ($> 6{,}5$h) et il y aura donc un risque pour le patient avec ce protocole.

Partie B

1) on a une baisse de 30% soit la multiplication par le coefficient $\left(1-\frac{30}{100}\right)=0{,}7$ $\boxed{\text{et}}$ un ajout de 0,75 mg.

on obtient bien $U_{n+1}=0{,}7\,U_n+0{,}75$

2) a) initialisation on a $U_0=1$ et $U_1=0{,}7\times U_0+0{,}75=0{,}7\times 1+0{,}75=1{,}45$

Donc on a bien $U_0 \leq U_1 \leq 4$

→ la propriété est vraie au rang 0

hérédité on suppose $U_n \leq U_{n+1} \leq 4$

$\rightarrow\ 0{,}7U_n \leq 0{,}7U_{n+1} \leq \underbrace{0{,}7\times 4}_{=2{,}8}$

on obtient $0{,}7U_n+0{,}75 \leq 0{,}7U_{n+1}+0{,}75 \leq 2{,}8+0{,}75$

c'est à dire $U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 3{,}55\ (\leq 4)$

Donc la propriété supposée vraie au rang n reste vraie au rang (n+1) et, en appliquant le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout n.

b) La suite (U_n) est $\boxed{\text{croissante}}$ (car $U_n \leq U_{n+1}$) et $\boxed{\text{majorée}}$ (car $U_n \leq 4$). Elle donc convergente d'après le théorème de la convergence monotone.

c) on a $U_{n+1}=0{,}7\,U_n+0{,}75$ avec (U_n) convergente vers ℓ.

Par passage à la limite, on obtient l'équation :

$\ell=0{,}7\ell+0{,}75 \rightarrow 0{,}3\ell=0{,}75 \rightarrow \ell=\frac{0{,}75}{0{,}3}=\boxed{2{,}5}$

d) pas de risque pour le patient ici car la suite est croissante et elle converge vers 2,5 → elle ne dépassera jamais $\boxed{3}$ mg.

3) a) on a $\boxed{V_{n+1}}=U_{n+1}-2{,}5=0{,}7U_n+0{,}75-2{,}5$

$=0{,}7U_n-1{,}75$

$=0{,}7\left(U_n-\frac{1{,}75}{0{,}7}\right)=0{,}7(\underbrace{U_n-2{,}5}_{V_n})$

On a donc $V_{n+1}=0{,}7\,V_n$ → suite géométrique de raison 0,7 et de premier terme $V_0=U_0-2{,}5$

$=1-2{,}5=-1{,}5$

b) on applique la formule des suites géométriques.

$V_n=V_0\times q^{(n-0)}=-1{,}5\times 0{,}7^n$

et puisque $V_n = U_n - 2,5$, on en déduit :

$$U_n = V_n + 2,5 \rightarrow \boxed{U_n = -1,5 \times 0,7^n + 2,5}$$

4) on résout l'inéquation $U_n > 2,4$

soit $-1,5 \times 0,7^n + 2,5 > 2,4$

on obtient $-1,5 \times 0,7^n > -0,1$ $= 2,4 - 2,5$

$$0,7^n < \frac{-0,1}{-1,5}$$

inversion avec la division par un nombre négatif $(-1,5)$

on applique la fonction ln qui est croissante (et qui conserve l'ordre).

on obtient $\ln(0,7)^n < \ln\left(\frac{-0,1}{-1,5}\right)$ $= \ln\left(\frac{1}{15}\right)$ $= \ln(1) - \ln(15)$ $= -\ln 15$

c'est à dire $n \times \ln(0,7) < -\ln(15)$

soit $n > \frac{-\ln(15)}{\ln(0,7)}$

nouvelle inversion avec la division par le nombre négatif $\ln(0,7)$.

on a $-\frac{\ln(15)}{\ln(0,7)} \simeq 7,59$

et, donc, au bout de 8 injections supplémentaires, la quantité de médicament dépassera 2,4 mg.