Exercice 4

① La fonction f semble convexe sur $]-\infty;1]$ et concave sur $[1;+\infty[$ (le point A serait le point d'inflexion).

② on a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ donc on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2+1) = \boxed{+\infty}$

et on a $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x = \boxed{+\infty}$

Par somme des limites, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$.

③ a) on a
$$\begin{aligned}
f(x) &= 5\ln(x^2+1) - 3x \\
&= 5\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) - 3x \\
&= 5\left(\ln(x^2) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) - 3x \\
&= 5\left(2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) - 3x \\
&= 10\ln x - 3x + 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \\
&= x\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) + 5\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

on a $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ car $x > 0$

ça y est !!

b) avec les croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) = -3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\underbrace{\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right)}_{-3} = \boxed{-\infty}$

De plus, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \to \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1 \to \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \boxed{0}$

Donc, par produit et somme, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$

④ a) on reprend l'expression $f(x) = 5\ln(x^2+1) - 3x$

et on obtient $f'(x) = \frac{5}{x^2+1} \times 2x - 3$ ← la dérivée de (x^2+1).

on en déduit $f'(x) = \frac{10x - 3(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{-3x^2+10x-3}{x^2+1}$

b) on a $x^2+1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe du numérateur $-3x^2+10x-3$.

→ on calcule $\Delta = (10)^2 - 4\times(-3)\times 3 = 64 > 0$

et il y a donc deux racines $x_1 = 3$ et $x_2 = \frac{1}{3}$ reprenez vos formules !

on obtient :

x	$-\infty$ $\quad$ $\frac{1}{3}$ $\quad$ 3 $\quad$ $+\infty$
signes de $f'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
variations de f	↘ ↗ ↘

trinôme avec un coefficient a négatif

③ a) Le signe de $f''(x)$ nous donnera la convexité ou la concavité de la fonction f.

↳ on résout $-10x^2+10=0$ ↳ $x^2=1$ ↳ $\boxed{x=1}$ ou $\boxed{x=-1}$

on obtient donc le tableau suivant (en sachant que l'expression $(x^2+1)^2$ est strictement positive)

trinôme avec un coefficient a négatif

x	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
signes de $f''(x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$
fonction f	concave | convexe | concave

Donc la conjecture faite dans la question 1 n'était pas fausse mais seulement incomplète car il nous manquait une partie de la courbe (entre $-\infty$ et -1) !

b) on applique la formule $y = f'(1)\times(x-1)+f(1)$

avec $f(1) = 5\ln(1^2+1) - 3\times 1 = 5\ln 2 - 3$

et $f'(1) = \dfrac{-3\times 1^2 + 10\times 1 - 3}{1^2+1} = 2$

on obtient $y = 2(x-1) + 5\ln(2) - 3$

ou $y = 2x + 5\ln(2) - 5 = 2x + 5(\ln(2)-1)$

c) pour $x \geq 1$, la fonction f est concave.

Sa courbe $\mathcal{C}_f$ sera donc en dessous de ses tangentes sur cet intervalle.

Donc, pour $x\geq 1$, on aura $f(x) \leq y$

soit $5\ln(x^2+1) - 3x \leq 2x + 5(\ln(2)-1)$

soit $5\ln(x^2+1) \leq 5x + 5(\ln(2)-1)$

soit $\ln(x^2+1) \leq x + \ln(2) - 1$ en divisant par 5 !!