Exercice 3

Partie A

1) Le repère n'est pas très habituel mais vous devez vous en sortir sans trop de souci → on a $A\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

2) on a $\vec{SC}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-2\end{pmatrix} \to \vec{SC}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{SB}\begin{pmatrix}-1-0\\1-0\\0-2\end{pmatrix} \to \vec{SB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

Le repère étant orthonormé, on en déduit :

$\vec{SC}\cdot\vec{SB} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} = 1\times(-1)+1\times 1+(-2)\times(-2) = \boxed{4}$

3) on sait aussi que $\vec{SC}\cdot\vec{SB} = SC\times SB\times\cos(\widehat{BSC})$

avec $SC = \|\vec{SC}\| = \sqrt{1^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{6}$

et $SB = \|\vec{SB}\| = \sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{6}$

on en déduit $\vec{SC}\cdot\vec{SB} = \sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\cos(\widehat{BSC}) = 4$

soit $\cos(\widehat{BSC}) = \dfrac{4}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}} = \dfrac{2}{3}$

$\to \widehat{BSC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) \approx \boxed{48{,}2^\circ}$

Partie B

1) a) $\vec{n}$ est normal au plan (SBC) si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs (non colinéaires) du plan (SBC).

on sait que $\vec{SC}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{SB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

→ ces vecteurs ne sont pas colinéaires car $-1:1=-1$
$1:1=1\neq-1$!

on calcule $\vec{n}\cdot\vec{SC} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = 0\times1+2\times1+1\times(-2) = \boxed{0} \to \vec{n}\perp\vec{SC}$

et $\vec{n}\cdot\vec{SB} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} = 0\times(-1)+2\times1+1\times(-2) = \boxed{0} \to \vec{n}\perp\vec{SB}$

Donc le vecteur $\vec{n}$ est bien normal au plan (SBC).

b) Les coordonnées de $\vec{n}$ seront donc les coefficients a, b et c de l'équation cartésienne du plan (SBC)

On obtient $\underbrace{0}_{a}\times x+\underbrace{2}_{b}\times y+\underbrace{1}_{c}\times z+d=0 \to 2y+z+d=0$

or on sait que $S\in(SBC) \to 2\times\underbrace{0}_{y_S}+\underbrace{2}_{z_S}+d=0 \to d=-2$

et on obtient l'équation cartésienne $\boxed{2y+z-2=0}$

② ⓐ La droite (OH) est orthogonale au plan (SBC) et, donc, le vecteur $\vec{OH}$ est forcément colinéaire à $\vec{n}$ vecteur normal à ce même plan.

Donc la droite (OH) peut être définie avec $\vec{n}$ comme vecteur directeur et on obtient $\begin{cases} x = \boxed{0} + \boxed{0} \times t \\ y = \boxed{0} + \boxed{2} \times t \\ z = \boxed{0} + \boxed{1} \times t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

point O → vecteur directeur.

ⓑ Le point H sera donc le point d'intersection du plan (SBC) avec la droite (OH).

On "met" la représentation paramétrique de (OH) dans l'équation cartésienne de (SBC).

On obtient : $2(2t) + t - 2 = 0 \rightarrow 5t - 2 = 0$
$\rightarrow t = \frac{2}{5}$

et les coordonnées de H sont $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \times \frac{2}{5} \\ z = \frac{2}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{4}{5} \\ z = \frac{2}{5} \end{cases} \rightarrow H\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

ⓒ H étant le projeté orthogonal du point O sur le plan (SBC), la distance du point O au plan (SBC) est égale à OH.

On a $\vec{OH}\begin{pmatrix} 0-0 \\ 4/5 - 0 \\ 2/5 - 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{OH}\begin{pmatrix} 0 \\ 4/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$

et $OH = \|\vec{OH}\| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \boxed{\frac{\sqrt{20}}{5}} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

Partie C

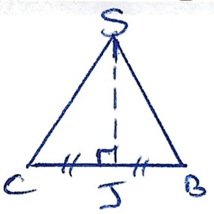
② a) On va prendre comme base le carré ABCD et la hauteur associée sera [OS]

↳ on a donc $V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times Aire_{ABCD} \times OS = \frac{1}{3} \times (2 \times 2) \times 2 = \boxed{\frac{8}{3}}\ cm^3$.

b) La pyramide SABCD peut être partagée en quatre pyramides de même volume (OCBS, ODCS, OADS, OBAS).

On a donc : $V_{OCBS} = \frac{1}{4} \times V_{SABCD} = \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}\ cm^3$

② croquis



Le triangle SCB est isocèle en S et sa hauteur issue de S correspond au segment [SJ].

on calcule donc $\text{Aire}_{SBC} = \dfrac{\overset{\text{base}}{BC} \times \overset{\text{hauteur}}{SJ}}{2}$

et on calcule SJ en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle SJC rectangle en J.

On a $SC^2 = SJ^2 + CJ^2 \rightarrow SJ^2 = (\sqrt{6})^2 - 1^2 = 5 \rightarrow SJ = \sqrt{5}$

on a calculé SC dans la partie A.

On obtient donc $\text{Aire}_{SBC} = \dfrac{2 \times \sqrt{5}}{2} = \boxed{\sqrt{5}}\ cm^2$.

③ on va maintenant exprimer le volume de la pyramide OCBS en prenant le triangle SBC comme base et la hauteur associée sera alors [OH].

résultat du 1) c)

Donc on a $V_{OCBS} = \dfrac{1}{3} \times \text{Aire}_{SBC} \times OH = \dfrac{2}{3}$

$\rightarrow \dfrac{1}{3} \times \sqrt{5} \times OH = \dfrac{2}{3} \rightarrow OH = \boxed{\dfrac{2}{\sqrt{5}}} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}\ cm$.