Exercice 2

Partie A ① on calcule $U_1 = 4 - \frac{4}{U_0} = 4 - \frac{4}{4} = 4 - 1 = \boxed{3}$ milliers

↳ il y aura 3000 perches-soleil au 1er janvier 2026.

② ⓐ on a $h(x) = 4 - \frac{4}{x} = 4 - 4 \times \frac{1}{x}$

on obtient $h'(x) = 0 - 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4}{x^2}$

Donc on a $h'(x) > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

↳ La fonction h est donc (strictement) croissante sur $]0; +\infty[$.

ⓑ on va faire ici un raisonnement par récurrence.

Initialisation on a $U_0 = 4$ et $U_1 = 3$

Donc on a bien $2 \leq U_1 \leq U_0 \leq 4$

et la propriété est bien vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité on suppose $2 \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 4$

on applique la fonction h qui est croissante et qui va donc conserver l'ordre.

on obtient $h(2) \leq h(U_{n+1}) \leq h(U_n) \leq h(4)$

soit $2 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1} \leq 3 \ (\leq 4)$

et la propriété reste vraie au rang $(n+1)$.

D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout n

ⓒ La suite (U_n) est donc décroissante (car $U_{n+1} \leq U_n$) et minorée (car $U_n \geq 2$). D'après le théorème de la convergence monotone, la suite (U_n) est convergente.

ⓓ La suite (U_n) est convergente et elle est définie par la relation $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f continue sur $]0; +\infty[$.

D'après le théorème du point fixe, sa limite ℓ va vérifier l'égalité $\ell = f(\ell)$.

on résout donc l'équation $\ell = 4 - \frac{4}{\ell} \rightarrow \frac{\ell^2}{\ell} = \frac{4\ell}{\ell} - \frac{4}{\ell}$

c'est à dire $\ell^2 - 4\ell + 4 = 0$ soit $(\ell - 2)^2 = 0$

(on aurait pu également calculer le discriminant Δ) $\rightarrow \ell - 2 = 0$ ou $\boxed{\ell = 2}$

Donc, à long terme, le nombre de perches-soleil va se rapprocher de 2000 et il n'y aura donc pas d'élimination.

③ a) while $u >= 5$

$u = 4 - 4/u$

$n = n + 1$

b) avec la calculatrice, on obtient $U_9 = 2$

et $U_{10} \simeq 2{,}18$

↳ La commande population (2.2) va renvoyer la valeur $\boxed{n = 10}$

et la population de perches-soleil va passer sous les 2200

à partir de l'année 2035 (2025 + 10).

Partie B ① on résout l'équation (E) : $y' = -y + 2$

→ soit vous connaissez le résultat de cours par coeur

Les solutions de $y' = ay + b$ s'écrivent $y(x) = Ae^{at} - \frac{b}{a}$ $(A \in \mathbb{R})$

→ soit vous passez par la somme de la solution générale

de l'équation homogène (E_0) $y' = -y \rightarrow y = Ae^{-t}$ $(A \in \mathbb{R})$

et d'une solution particulière de (E) par exemple, $y(t) = 2$

car on a $y'(t) = 0$

et donc $y'(t) = -y(t) + 2$!

Dans tous les cas, on obtient les fonctions définies

par $\{ t \rightarrow Ae^{-t} + 2$, avec $A \in \mathbb{R} \}$

② on cherche $p(t) = Ae^{-t} + 2$ avec $p(0) = 4$

↳ on obtient $A\underbrace{e^{-0}}_{=1} + 2 = 4 \rightarrow A + 2 = 4 \rightarrow A = 2$

On obtient bien $p(t) = \boxed{2e^{-t} + 2}$

③ on a $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t) = \boxed{2}$

et, à long terme, il n'y aura pas d'élimination des perches-soleil, et leur population va se rapprocher, comme pour le modèle précédent, de 2000.