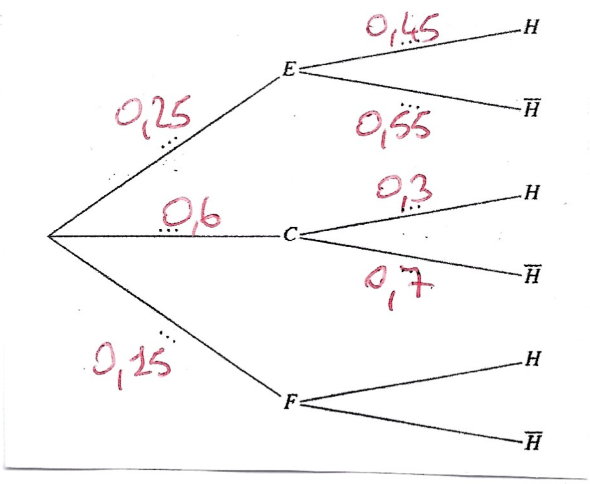
Exercice 1

Partie A ① on a l'arbre suivant



$p(C) = 1 - (0{,}25 + 0{,}15) = 0{,}6$
et on n'oubliera pas que l'on connait $p(F \cap H) = 0{,}12$

② on a $p(E \cap H) = p(E) \times p_E(H) = 0{,}25 \times 0{,}45 = \boxed{0{,}1125}$

③ avec la formule des probabilités totales, on sait que :

$$p(H) = p(E \cap H) + p(C \cap H) + p(F \cap H)$$
$$= 0{,}1125 + 0{,}6 \times 0{,}3 + 0{,}12 = \boxed{0{,}4125}$$

④ on cherche $p_H(E) = \dfrac{p(E \cap H)}{p(H)} = \dfrac{0{,}1125}{0{,}4125} \simeq \boxed{0{,}273}$

Partie B ① on aura $n = \boxed{8}$ et $p = p(H) = \boxed{0{,}4125}$

② on cherche $p(X = 0)$ et il est certainement intéressant de montrer que vous connaissez la formule suivante :

$$p(X=0) = \binom{8}{0} \times p^0 \times (1-p)^{8-0}$$
$$= 1 \times 1 \times (1 - 0{,}4125)^8 \simeq \boxed{0{,}014}$$

③ a) on a $q_n = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$

soit $q_n = 1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times (1-p)^{n-0} = 1 - (1 - 0{,}4125)^n$

$\rightarrow \boxed{q_n = 1 - (0{,}5875)^n}$

b) on résout $q_n \geq 0{,}999$

soit $1 - (0{,}5875)^n \geq 0{,}999$

on obtient $(0{,}5875)^n \leq 0{,}001$ ← $1 - 0{,}999$

$\ln(0{,}5875)^n \leq \ln(0{,}001)$ La fonction ln conserve l'ordre car elle est croissante.

$n \times \ln(0{,}5875) \leq \ln(0{,}001)$

$n \geq \dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}5875)} \simeq 12{,}987$

on a divisé par $\ln(0{,}5875)$ qui est négatif !

Donc on aura la condition voulue à partir de $\boxed{13}$ abonnés.

Partie C

1. Les valeurs possibles de la variable aléatoire Y sont :

$5€$; $7€$; $10€$; $12€$; $16€$; $18€$

$7€ = 5€+2€$; $12€ = 10€+2€$; $18€ = 16€+2€$

2. On obtient le tableau suivant pour la loi de probabilité de Y.

y_i	5	7	10	12	16	18
p_i	0,1375	0,1125	0,42	0,18	0,03	0,12

$p(E\cap\overline{H}) = 0,25\times0,55 = 0,1375$; $p(E\cap H)$; $p(C\cap\overline{H}) = 0,6\times0,7 = 0,42$; $p(C\cap H)$; $p(F\cap\overline{H})$ en utilisant par exemple que la somme des p_i est égale à 1. ; $p(F\cap H)$

3. On a $E(Y) = \sum_i p_i y_i = p_1y_1 + p_2y_2 + \dots + p_6y_6$

$= 0,1375\times5 + 0,1125\times7 + \dots + 0,12\times18 = \boxed{10,475\,€}$.

→ pour un grand nombre d'abonnés, on peut s'attendre à un montant moyen payé de 10,475 € par abonné.

4. On obtient $V(Y) \approx \boxed{13,70}$.

5. a) On a $\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)}$ → $V(Z) = \sigma^2(Z) = 2^2 = \boxed{4}$

b) On remarque que la variable Z va vérifier $|Z-9|<3$

Or on a $|Z-9|<3$ qui correspond à $|Z-E(Z)|<3$

et on sait que $p(|Z-E(Z)|<3) = 1 - p(|Z-E(Z)|\geq 3)$

↳ avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev, on aura :

$$p(|Z-E(Z)|\geq 3) \leq \frac{V(Z)}{3^2}$$

soit $$1 - p(|Z-E(Z)|<3) \leq \frac{4}{9}$$

et on obtient $$p(|Z-\underbrace{E(Z)}_{=9}|<3) \geq \underbrace{1-\frac{4}{9}}_{\approx 0,56} > 0,5$$

La probabilité cherchée est bien supérieure à 0,5 (ou 50%) et on a bien au moins 50% de chances d'obtenir la condition voulue.