Exercice 3 version "brouillon"

Partie A ① $f'(x) = \frac{6x+2}{3x^2+2x}$ ← u' / ← u → $f'(x) > 0$ sur $[2;+\infty[$

Donc f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$

② a) on calcule $g(2) = f(2) - 2 = \ln(3\times2^2+2\times2) - 2 \approx 0,77$

↳ la fonction g est strictement décroissante et continue sur $[2;+\infty[$

avec $g(2) \approx 0,77$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

on a $0 \in]-\infty; g(2)]$ et d'après le corollaire du TVI,

l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[2;+\infty[$

b) on obtient avec la calculatrice $\boxed{4,04 < \alpha < 4,05}$

c) on en déduit :

x	2		α		$+\infty$
signes de $g(x)$		$+$	0	$-$	

car g est une fonction décroissante

Partie B on a $a_{n+1} = f(a_n)$

① initialisation on nous donne $2 \leq a_0 \leq \alpha$ → $\boxed{\text{OK}}$

hérédité on suppose $2 \leq a_n \leq \alpha$

on applique f croissante qui conserve l'ordre

$f(2) \leq f(a_n) \leq f(\alpha)$ ← on a $h(\alpha) = 0$

soit $f(\alpha) - \alpha = 0$

soit $f(\alpha) = \alpha$

$2 \leq \underbrace{\ln(16)}_{\approx 2,8} \leq a_{n+1} \leq \alpha$

→ $\boxed{\text{OK}}$

on a bien la propriété voulue par le principe de récurrence.

② on sait que $a_n \leq \alpha$ et on sait que g est positive sur $[2;\alpha]$ → on a $g(a_n) \geq 0$

soit $f(a_n) - a_n \geq 0$ car $g(x) = f(x) - x$

soit $a_{n+1} \geq a_n$ → suite croissante

③ (a_n) est majorée par α et elle est croissante

→ (a_n) converge (théorème de la convergence monotone)

④ théorème du point fixe → la limite l vérifiera $l = f(l)$

soit $f(l) - l = 0$ ou $g(l) = 0$ → on a $\boxed{l = \alpha}$

Partie C

(1) avec $a_0 = 2$, on sait que (a_n) est croissante et converge vers α (voir partie B).

On nous donne (b_n) strictement décroissante et convergente vers α également $\rightarrow$ on a $a_n \leq b_n$ pour tout n

on schématise la situation

$$\boxed{\begin{array}{c} \searrow (b_n) \\ \hline \nearrow (a_n) \end{array} \alpha}$$

(2) Le script effectuera ici des boucles tant que la différence entre les termes b_n et a_n est supérieure à 0,01 (10^{-2}).

a) on obtient les différentes valeurs suivantes
$n = 9$ et $a \simeq 4{,}044$

b) à partir du rang 9, on a (avec la valeur 4,04) une valeur approchée de α à 0,01 près.