

Exercice 3 version "brouillon"

Partie A ① $f(x) = \frac{6x+2}{3x^2+2x} \rightarrow f(x) > 0$ sur $[2; +\infty[$

Donc f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$

② a) on calcule $g(2) = f(2) - 2 = \ln(3 \times 2^2 + 2 \times 2) - 2 \approx 0,77$

↳ la fonction g est strictement décroissante et continue sur $[2; +\infty[$
avec $g(2) \approx 0,77$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

on a $0 \in]-\infty; g(2)[$ et d'après le corollaire du TVI,
l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[2; +\infty[$

b) on obtient avec la calculatrice $4,04 < \alpha < 4,05$

c) on en déduit :

x	2	α	$+\infty$
signes de $g(x)$	+	0	-

car g est une fonction décroissante

Partie B on a $a_{n+1} = f(a_n)$

① initialisation on nous donne $2 \leq a_0 \leq 2 \rightarrow \boxed{\text{OK}}$

hérédité on suppose $2 \leq a_n \leq 2$

on applique f croissante qui conserve l'ordre

$f(2) \leq f(a_n) \leq f(2) \leftarrow$ on a $h(\alpha) = 0$

$2 \leq \ln(16) \leq a_{n+1} \leq 2$

$\approx 2,8$

$\rightarrow \boxed{\text{OK}}$

on a bien la propriété voulue par le principe de récurrence.

② on sait que $a_n \leq 2$ et on sait que g est positive sur $[2; 2]$ \rightarrow on a $g(a_n) \geq 0$

soit $f(a_n) - a_n \geq 0$ car $g(x) = f(x) - x$

soit $a_{n+1} \geq a_n \rightarrow$ suite croissante

③ (a_n) est majorée par 2 et elle est croissante

$\rightarrow (a_n)$ converge (théorème de la convergence monotone)

④ théorème du point fixe \rightarrow la limite l vérifiera $l = f(l)$

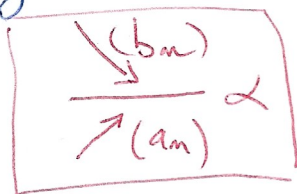
soit $f(l) - l = 0$ ou $g(l) = 0 \rightarrow$ on a $\boxed{l = 2}$

Partie C

① avec $a_0 = 2$, on sait que (a_n) est croissante et converge vers α (voir partie B).

On nous donne (b_n) strictement décroissante et convergente vers α également \rightarrow on a $a_n \leq b_n$ pour tout n

on schématise la situation



② Le script effectuera ici des boucles tant que la différence entre les termes b_n et a_n est supérieure à $0,01 (10^{-2})$.

a) on obtient les différentes valeurs suivantes
 $n = 9$ et $a \approx 4,044$

b) à partir du rang 9, on a (avec la valeur 4,04) une valeur approchée de α à $0,01$ près.