Exercice 4 Version "brouillon"

Partie A

① ⓐ pas de forme indéterminée en 0,

on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\overbrace{\ln x}^{\to -\infty}}{\underbrace{x^2}_{\to 0}} = \boxed{-\infty}$

et en $+\infty$, on utilise les croissances comparées

avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\dfrac{\ln x}{x^2} = \underbrace{\dfrac{\ln x}{x}}_{\to 0} \times \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0}$

on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

ⓑ $\lim\limits_{0} = -\infty \to$ asymptote verticale d'équation $x = 0$

$\lim\limits_{+\infty} = 0 \to$ asymptote horizontale d'équation $y = 0$

② on a $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ $\left(\dfrac{u}{v}\right) \to f'(x) = \dfrac{\overset{u'}{\frac{1}{x}} \times \overset{v}{x^2} - \overset{u}{\ln(x)} \times \overset{v'}{2x}}{\underbrace{(x^2)^2}_{v^2}}$

soit $f'(x) = \dfrac{x - 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{\cancel{x}(1-2\ln x)}{x^{\cancel{4}\,3}} = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

③ on résout $1 - 2\ln x = 0 \to \ln x = \dfrac{1}{2} \to x = e^{1/2}$

et on a le tableau suivant

x	0		$e^{1/2}$		$+\infty$
$1-2\ln x$		$+$	0	$-$	
x^3		$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2e}$	$\searrow$	0

on a $f(e^{1/2}) = \dfrac{\ln(e^{1/2})}{(e^{1/2})^2} = \dfrac{1/2}{e} = \dfrac{1}{2e}$

④ on a $y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$

avec $f'(1) = \dfrac{1 - 2\overbrace{\ln(1)}^{=0}}{1^3} = 1$ et $f(1) = \dfrac{\overbrace{\ln(1)}^{=0}}{1} = 0$

et on obtient $y = 1 \times (x-1) + 0 \to \boxed{y = x - 1}$

⑤ on a $f'(x) = \dfrac{1-2\ln x}{x^3} \quad \left(\dfrac{u}{v}\right)$

$$\hookrightarrow f''(x) = \frac{\overset{u'}{-\frac{2}{x}} \times \overset{v}{x^3} - \overset{u}{(1-2\ln x)} \times \overset{v'}{3x^2}}{\underbrace{(x^3)^2}_{v^2}} = \frac{-2x^2 - 3x^2(1-2\ln x)}{x^6}$$

$$\hookrightarrow f''(x) = \frac{\cancel{x^2}(-2-3(1-2\ln x))}{x^{\cancel{6}\,4}} = \frac{-2-3+6\ln x}{x^4}$$

$$\hookrightarrow f''(x) = \frac{-5+6\ln x}{x^4}$$

⑥ ⓐ on résout $-5+6\ln x = 0 \rightarrow \ln x = \dfrac{5}{6} \rightarrow x = e^{5/6}$

$\rightarrow$ on obtient le tableau suivant

x	0		$e^{5/6}$		$+\infty$
$-5+6\ln x$		$-$	0	$+$	
x^4		$+$		$+$	
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
fonction f		concave		convexe	

point d'inflexion de coordonnées $\left(e^{5/6} ; \dfrac{\ln(e^{5/6})}{(e^{5/6})^2}\right)$

soit $\left(e^{5/6} ; \dfrac{5/6}{e^{10/6}}\right)$

ⓑ on a $e^{5/6} \simeq 2{,}3$ donc $1 \in \left]0 ; e^{5/6}\right]$

en sachant que sur cet intervalle, la fonction est concave

et $\mathcal{C}_f$ se trouvera en dessous de ses tangentes

Donc $\mathcal{C}_f$ se trouvera en dessous de Δ (tangente en 1)

et $f(x) \leq y \rightarrow \dfrac{\ln x}{x^2} \leq x-1$ ou $x - 1 \geq \dfrac{\ln x}{x^2}$

sur $\left]0 ; e^{5/6}\right]$

⑦ on a $e^{1/2} \simeq 1,65$

or f est décroissante sur $[e^{1/2} ; +\infty[$ donc sur $[e^{5/6} ; +\infty[$

car $e^{5/6} > e^{1/2}$

et $(x-1)$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[e^{5/6} ; +\infty[$

↳ on a $x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}$ sur $]0 ; e^{5/6}]$

et on gardera $x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}$ sur $[e^{5/6} ; +\infty[$

Partie B ① $\frac{\ln x}{x^2}$ est positive sur $[1 ; n]$

donc I_n représente $\boxed{\text{l'aire}}$ entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = 2$

② on a $I_{n+1} = \int_1^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = \underbrace{\int_1^{n} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx}_{I_n} + \underbrace{\int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx}_{\geq 0}$

Donc on a $I_{n+1} \geq I_n$ (suite croissante)

③ on écrira $S = S + \underbrace{\ln(i)}\,/\,\underbrace{(i*i)}_{\text{pour } i^2}$

aire d'un rectangle de côté 1 et $f(i)$

④ $I_n = \int_1^n \underbrace{\ln(x)}_{u} \times \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{v'}\,dx$

$= \Big[\underbrace{\ln(x)}_{u} \times \underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{v}\Big]_1^n - \int_1^n \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \times \underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{v}\,dx$

↳ $I_n = -\frac{\ln n}{n} + \underbrace{\frac{\ln 1}{n}}_{=0} + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln n}{n} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n$

↳ $I_n = -\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n} + 1 = \frac{n - 1 - \ln(n)}{n}$

⑤ on a $I_n = \frac{\cancel{n}\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n}\right)}{\cancel{n}}$ $\frac{1}{n} \to 0$; $\frac{\ln(n)}{n} \to 0$ (croissance comparée)

et on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \boxed{1}$