Exercice 2 version "brouillon"

① on calcule $f'(x) + f(x)$ et on "voit" si le résultat est égal à $2\cos(x)$.

↳ on a $f(x) = 4e^{-x} + \cos x + \sin x$

soit $f'(x) = -4e^{-x} - \sin x + \cos x$

On a donc $f(x) + f'(x) = \cancel{4e^{-x}} + \cos x + \cancel{\sin x} - \cancel{4e^{-x}} - \cancel{\sin x} + \cos x$

$= 2\cos(x)$ → $\boxed{\text{VRAIE}}$

② on va considérer la fonction $h(x) = 2x - \sin x$

→ les points d'intersection correspondent alors à $h(0)$.

→ on calcule $h'(x) = 2 - \cos x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\cos x$ est compris entre -1 et 1

et on a $h(0) = 2\times 0 - \sin(0) = 0$

On a donc le tableau suivant

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $h'(x)$		$+$	
variations de h	↗	0	↗

Donc l'équation $h(x) = 0$ a une solution unique sur $\mathbb{R}$ et il existe un unique point d'intersection vérifiant $f(x) = g(x)$.

→ $\boxed{\text{VRAIE}}$

③ on a $-1 \leq \sin(n) \leq 1$

soit $\dfrac{2n-1}{n+1} \leq \dfrac{2n+\sin(n)}{n+1} \leq \dfrac{2n+1}{n+1}$

$\dfrac{\cancel{n}(2-\frac{1}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}$ avec $\frac{1}{n} \to 0$ tend vers 2 (quand $n \to +\infty$)

$\dfrac{\cancel{n}(2+\frac{1}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}$ avec $\frac{1}{n} \to 0$ tend vers 2 (quand $n \to +\infty$)

et en appliquant le théorème des gendarmes,

on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \boxed{2}$ → la suite converge vers 2

→ $\boxed{\text{FAUSSE}}$

$\boxed{4}$ <u>initialisation</u> : on vérifie $U_1 = 1^2 = 1 \rightarrow \boxed{OK}$

<u>hérédité</u> : on suppose que $U_n = n^2$

et on veut montrer que $U_{n+1} = (n+1)^2$

or on a $U_{n+1} = U_n + 2n + 1$

$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \rightarrow \boxed{OK}$

et, avec le principe de récurrence, on a bien

$U_n = n^2$ pour $n \geq 1 \rightarrow \boxed{VRAIE}$

5) on a $U_{n+1} = e^{-(n+1)} = e^{-n-1} = e^{-n} \times e^{-1} = U_n \times e^{-1}$

Donc (U_n) est une suite géométrique de raison e^{-1}

avec $U_0 = e^{-0} = 1$

S_n va représenter la somme des termes consécutifs de cette suite géométrique

$$\hookrightarrow S_n = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{(\text{nombre de termes})}}{1 - \text{raison}}$$

$$= 1 \times \frac{1 - (e^{-1})^{(n+1)}}{1 - e^{-1}}$$

$$\hookrightarrow S_n = \frac{1 - e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}}$$

on a $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-(n+1)} = 0$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} -(n+1) = -\infty$

$$\text{donc } \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{\frac{e-1}{e}} = \frac{e}{e-1}$$

$\rightarrow \boxed{VRAIE}$