Bac Spé Maths 2026

Voici la correction complète

du jour 2

pour le sujet Amérique du Nord

Jeudi 21 Mai 2026

Correction proposée par

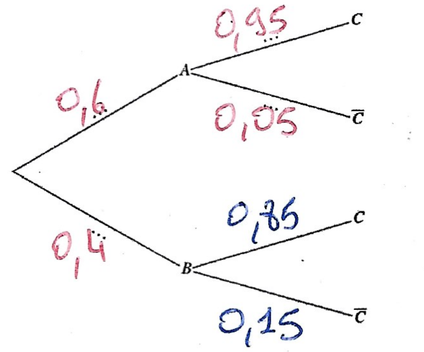
Bruno Swiners

www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A

① on a l'arbre suivant



on a $p(A) = 60\% = 0,6$

$p(B) = 1 - 0,6 = 0,4$

et $p(C) = 0,91$ ne peut pas être placée dans l'arbre.

② ⓐ on calcule $p(A \cap C) = p(A) \times p_A(C) = 0,6 \times 0,95 = \boxed{0,57}$

ⓑ on cherche $p_B(C) = \dfrac{p(B \cap C)}{p(B)}$

or, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$p(C) = p(B \cap C) + p(A \cap C)$ $\quad (0,91 - 0,57)$

$\hookrightarrow \quad 0,91 = p(B \cap C) + 0,57 \rightarrow p(B \cap C) = 0,34$

On en déduit $p_B(C) = \dfrac{p(B \cap C)}{p(B)} = \dfrac{0,34}{0,4} = \boxed{0,85}$

ⓒ on calcule $p_{\overline{C}}(A) = \dfrac{p(A \cap \overline{C})}{p(\overline{C})} = \dfrac{0,6 \times 0,05}{0,09} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

$\leftarrow 1 - 0,91$

et $p_{\overline{C}}(B) = \dfrac{p(B \cap \overline{C})}{p(\overline{C})} = \dfrac{p(B) \times p_B(\overline{C})}{p(\overline{C})}$

avec $p_B(C) = 0,85$ donc $p_B(\overline{C}) = 0,15$

(on a complété l'arbre en bleu).

$\hookrightarrow p_{\overline{C}}(B) = \dfrac{0,4 \times 0,15}{0,09} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

Donc on a $p_{\overline{C}}(B) = 2 \times p_{\overline{C}}(A)$ ou $p_{\overline{C}}(A) = \dfrac{1}{2} \times p_{\overline{C}}(B)$.

→ Le responsable des achats a donc raison.

Partie B

① ⓐ on aura $n = \boxed{15}$ et $p = p(\overline{C}) = \boxed{0,09}$

ⓑ on cherche $p(X=2) = \binom{15}{2} \times 0,09^2 \times (1 - 0,09)^{15-2}$

ou on utilise directement la calculatrice,

et on obtient $p(X=2) \approx \boxed{0,250}$

ⓒ on aura $p(X \leq 2) \approx \boxed{0,853}$ (à la calculatrice)

2 a) on a $E(F_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \times E(X_n) = \frac{1}{n} \times (n \times p) = \boxed{0{,}09}$

et $V(F_n) = V\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(X_n) = \frac{1}{n^2}(n \times p \times (1-p)) = \frac{0{,}09 \times 0{,}91}{n} = \boxed{\frac{0{,}0819}{n}}$

les variables sont indépendantes

b) Les inégalités $0{,}04 < F_n < 0{,}14$ correspondent à écrire que $|F_n - 0{,}09| < 0{,}05$ car

$0{,}04 \quad 0{,}09 \quad 0{,}14$

$0{,}05 \quad 0{,}05$

soit $|F_n - E(F_n)| < 0{,}05$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous donne

$$p(|F_n - E(F_n)| \geq 0{,}05) \leq \frac{V(F_n)}{0{,}05^2}$$

$$\rightarrow p(|F_n - E(F_n)| \geq 0{,}05) \leq \frac{0{,}0819}{n \times 0{,}05^2}$$

$\frac{0{,}0819}{0{,}05^2} = 32{,}76$

$$\rightarrow 1 - p(|F_n - E(F_n)| < 0{,}05) \leq \frac{32{,}76}{n}$$

car $p(|F_n - E(F_n)| \geq 0{,}05) = 1 - p(|F_n - E(F_n)| < 0{,}05)$

et on a bien $p(|F_n - E(F_n)| < 0{,}05) \geq 1 - \frac{32{,}76}{n}$

c'est à dire $p(0{,}04 < F_n < 0{,}14) \geq 1 - \frac{32{,}76}{n}$

c) on a ici $F_n = \frac{55}{500} = 0{,}11$ (c'est la fréquence de tomates non commercialisables)

et l'expression $1 - \frac{32{,}76}{n}$ devient $1 - \frac{32{,}76}{500} \simeq 0{,}93448$

Donc la fréquence F_{500} est bien comprise entre $0{,}04$ et $0{,}14$ et la probabilité que ce soit bien le cas est supérieure ou égale à $0{,}93448$ (soit $93{,}448\%$).

Donc le responsable des achats pouvait largement s'attendre à ce résultat pour son échantillon de 500 tomates.

Exercice 2

Partie A

1) on résout l'équation $\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = x$ (équation pas si évidente)

↪ on obtient $2x = x(\sqrt{1+x^2})$

soit $2x - x(\sqrt{1+x^2}) = 0$

soit $x(2 - \sqrt{1+x^2}) = 0$ (équation produit nul)

$\boxed{x=0}$ ou $\sqrt{1+x^2} = 2$

$(\sqrt{1+x^2})^2 = 4$

$1+x^2 = 4$

$x^2 = 3 \rightarrow \boxed{x=\sqrt{3}}$ ou $\boxed{x=-\sqrt{3}}$

L'équation $f(x) = x$ a donc trois solutions : $-\sqrt{3}$; 0 ; $\sqrt{3}$

2) a) on applique la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u(x) = 2x \quad u'(x) = 2$

dérivée de $1+x^2$

$v(x) = \sqrt{1+x^2} \quad v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \times 2x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

On obtient $f'(x) = \dfrac{2\times\sqrt{1+x^2} - 2x\times\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2}$

↪ $f'(x) = \dfrac{\dfrac{2(\sqrt{1+x^2})^2 - 2x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2}$ $(\sqrt{1+x^2})^2 = 1+x^2$

on obtient $f'(x) = \dfrac{\dfrac{2(1+x^2) - 2x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \dfrac{\dfrac{2 + \cancel{2x^2} - \cancel{2x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$

et on a bien $f'(x) = \dfrac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ car $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{1}{c}$

b) on a $1+x^2 > 0$ et $\sqrt{1+x^2} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc on a $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$

et la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Partie B

① **initialisation**

on a $U_0 = 1$ et $U_1 = f(U_0) = \dfrac{2U_0}{\sqrt{1+U_0^2}} = \dfrac{2\times 1}{\sqrt{1+1^2}} = \sqrt{2}$

Donc on a bien $1 \leq U_0 \leq U_1 \leq \sqrt{2}$

→ la propriété est vérifiée au rang 0.

Hérédité

on suppose la propriété vraie au rang n

→ on a $1 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq \sqrt{3}$

On applique la fonction f qui est croissante sur $\mathbb{R}$ et qui CONSERVE l'ordre.

On obtient $f(1) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(\sqrt{3})$

soit $(1 \leq)\ \sqrt{2} \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq \sqrt{3}$

→ la propriété reste bien vérifiée au rang $(n+1)$ et, d'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout n.

② La suite (U_n) est donc croissante (car $U_n \leq U_{n+1}$) et majorée (car $U_n \leq \sqrt{3}$).

D'après le théorème de convergence monotone, on sait que la suite (U_n) est convergente.

Du coup, la suite (U_n) est convergente et définie par $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ de la suite devra vérifier l'équation $f(\ell) = \ell$.

D'après la partie A, on sait que cette équation a trois solutions $(-\sqrt{3}\,;0\,;\sqrt{3})$.

Mais les termes U_n étant compris entre 1 et $\sqrt{3}$, la seule solution possible est $\boxed{\ell = \sqrt{3}}$

③ a) On a $V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1}^2}{3 - U_{n+1}^2} = \dfrac{\left(\frac{2U_n}{\sqrt{1+U_n^2}}\right)^2}{3 - \left(\frac{2U_n}{\sqrt{1+U_n^2}}\right)^2} = \dfrac{\frac{4U_n^2}{1+U_n^2}}{3 - \frac{4U_n^2}{1+U_n^2}}$

On obtient $V_{n+1} = \dfrac{\frac{4U_n^2}{1+U_n^2}}{\frac{3(1+U_n^2) - 4U_n^2}{1+U_n^2}} = \dfrac{4U_n^2}{3 - U_n^2} = 4 \times \dfrac{U_n^2}{3 - U_n^2} = 4V_n$

$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \dfrac{a}{\cancel{b}} \times \dfrac{\cancel{b}}{c} = \dfrac{a}{c}$!!

Donc la suite (V_n) est bien géométrique de raison $\boxed{4}$,

avec $V_0 = \dfrac{U_0^2}{3-U_0^2} = \dfrac{1^2}{3-1^2} = \dfrac{1}{2} = \boxed{0{,}5}$

b) on a donc $\boxed{V_n} = V_0 \times q^{(n-0)} = \boxed{0{,}5 \times 4^n}$

et on utilise la relation $V_n = \dfrac{U_n^2}{3-U_n^2}$ afin d'exprimer U_n en fonction de V_n.

On a $V_n = \dfrac{U_n^2}{3-U_n^2}$ soit $V_n(3-U_n^2) = U_n^2$

soit $3V_n - V_n \times U_n^2 = U_n^2$

soit $U_n^2 + V_n \times U_n^2 = 3V_n$

soit $U_n^2(1+V_n) = 3V_n$

$\hookrightarrow U_n^2 = \dfrac{3V_n}{1+V_n}$

on obtient $U_n = \sqrt{\dfrac{3V_n}{1+V_n}}$

$\hookrightarrow U_n = \sqrt{\dfrac{3\times 0{,}5 \times 4^n}{1+0{,}5\times 4^n}} = \sqrt{\dfrac{1{,}5\times 4^n}{1+0{,}5\times 4^n}}$

c) En factorisant par 4^n, on obtient :

$U_n = \sqrt{\dfrac{\cancel{4^n}\times 1{,}5}{\cancel{4^n}\left(\underbrace{\frac{1}{4^n}}+0{,}5\right)}} \rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{\dfrac{1{,}5}{0{,}5}} = \boxed{\sqrt{3}}$

on simplifie

tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$

Partie C

(1) on aura $U = 1$

$S = S + u*u$ — on écrit $u*u$ pour u^2

$u = 2*u/\mathrm{sqrt}(1+u*u)$

(2) on a $1 \leq U_k \leq \sqrt{3}$ Donc on aura $1 \leq U_k^2 \leq 3$ — $(\sqrt{3})^2$

Donc S_n est constituée par la somme de n termes tous compris entre 1 et n $\rightarrow$ donc $1\times n \leq S_n \leq 3\times n$

soit $\boxed{n \leq S_n \leq 3n}$

(3) on a donc $S_n \geq n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

et, par comparaison, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \boxed{+\infty}$

(4) on a $n \leq S_n \leq 3n \rightarrow \dfrac{n}{n^2} \leq \dfrac{S_n}{n^2} \leq \dfrac{3n}{n^2} \rightarrow \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{S_n}{n^2} \leq \dfrac{3}{n}$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{n}\right) = 0$

D'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n^2} = \boxed{0}$

Exercice 3

① On remplace t par 0 et on obtient $\begin{cases} x = 1 + 2\times 0 = 1 \\ y = 1 + 0 = 1 \\ z = 1 + 2\times 0 = 1 \end{cases}$ soit $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

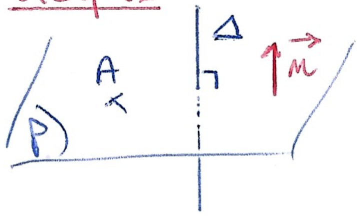
↪ ce sont bien les coordonnées du point $\boxed{C}$.

Par contre, pour le point A, on résout $\begin{cases} 1 + 2t = 4 \to t = \frac{3}{2} \\ 1 + t = 2 \to t = 1 \\ 1 + 2t = 2 \to t = \frac{1}{2} \end{cases}$

↪ on n'obtient pas la même valeur pour le paramètre t et le point A n'appartient pas à Δ.

croquis

② a)



Le plan P doit passer par le point A et avoir un vecteur normal $\vec{n}$ colinéaire au vecteur directeur de Δ.

↪ on calcule $2x_A + y_A + 2z_A - 14 = 2\times 4 + 2 + 2\times 2 - 14 = 0 \to \boxed{A \in P}$

↪ l'équation cartésienne de P nous donne un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
et la représentation paramétrique de Δ nous donne un vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ← ce sont les coefficients du paramètre t.

On a $\vec{n} = \vec{v}$ et ce plan est bien perpendiculaire à la droite Δ.

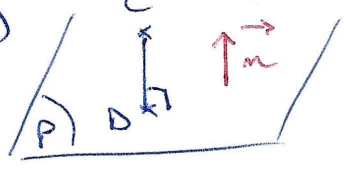
b) on calcule :

$2x_B + y_B + 2z_B - 14 = 2\times 5 + (-2) + 2\times 3 - 14 = 0 \to \boxed{B \in P}$

$2x_C + y_C + 2z_C - 14 = 2\times 1 + 1 + 2\times 1 - 14 = -9 \neq 0 \to \boxed{C \notin P}$

croquis

③ a)



On doit vérifier que le point D appartient à P et que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

↪ on calcule $2x_D + y_D + 2z_D - 14 = 2\times 3 + 2 + 2\times 3 - 14 = 0 \to \boxed{D \in P}$

↪ on a $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} \to \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on obtient $\overrightarrow{CD} = \vec{n}$ et les deux vecteurs sont bien colinéaires (avec un croquis "inexact" donc). un croquis reste juste un croquis...

b) On sait que les trois points A, B et D appartiennent à P.
Et on sait que le point C n'appartient pas à ce plan P.
Donc les quatre points ne sont pas coplanaires.

c) on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-4\\-2-2\\3-2\end{pmatrix} \to \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3-4\\2-2\\3-2\end{pmatrix} \to \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

on a donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 1\times(-1)+(-4)\times 0+1\times 1 = -1+0+1 = \boxed{0}$

d) on sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ soit $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$

↳ Le triangle ABD est donc rectangle en A.

On peut choisir ce triangle comme base du tétraèdre

avec $\text{Aire}_{ABD} = \dfrac{AB\times AD}{2}$

et la hauteur relative à cette base sera CD (d'après le 3) a))

On a donc $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{AB\times AD}{2}\right)\times CD$

or on connait déjà les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, de $\overrightarrow{AD}$ et de $\overrightarrow{CD}$.

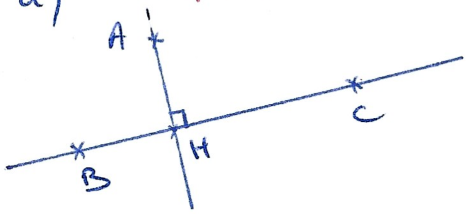
et on calcule $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(1)^2+(-4)^2+1^2} = \sqrt{18}$

$AD = \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{(-1)^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$

$CD = \|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$

on obtient donc $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{\sqrt{18}\times\sqrt{2}}{2}\right)\times 3 = \boxed{3}$ u.v.

4) a) croquis



On doit ici vérifier que le point H appartient bien à la droite (BC), c'est à dire que les points B, H et C sont alignés et on doit vérifier que $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$

⚠ Les calculs sont très fastidieux pour cette question ⚠ et on ne va pas tous les détailler

On a $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}73/29-5\\-4/29-(-2)\\51/29-3\end{pmatrix} \to \overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-\frac{72}{29}\\\frac{54}{29}\\-\frac{36}{29}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1-5\\1-(-2)\\1-3\end{pmatrix} \to \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}$

et on constate que $\overrightarrow{BH} = \dfrac{18}{29}\overrightarrow{BC}$ et les vecteurs sont bien colinéaires, et les points B, H et C sont bien alignés.

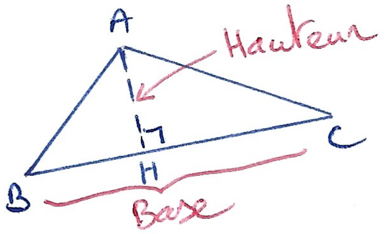
de plus, on a $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}73/29-4\\-4/29-2\\51/29-2\end{pmatrix} \to \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-\frac{43}{29}\\-\frac{62}{29}\\-\frac{7}{29}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}$

on calcule $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = -\dfrac{43}{29}\times(-4)+\left(-\dfrac{62}{29}\right)\times 3+\left(\dfrac{-7}{29}\right)\times(-2) = \boxed{0}$

Donc on a bien $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ et les conditions voulues sont bien vérifiées.

b) Dans le triangle ABC, [AH] va donc représenter la hauteur relative à la base [BC] de ce triangle.

croquis



On aura $\text{Aire}_{ABC} = \dfrac{BC \times AH}{2}$

et on calcule $BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

$$AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{\left(-\frac{43}{29}\right)^2 + \left(-\frac{62}{29}\right)^2 + \left(-\frac{7}{29}\right)^2} = \frac{3\sqrt{638}}{29}$$

on obtient donc $\text{Aire}_{ABC} = \dfrac{\sqrt{29} \times \frac{3\sqrt{638}}{29}}{2} = \boxed{\dfrac{3\sqrt{22}}{2}}$

c) on connait déjà le volume du tétraèdre ABCD (qui est égal à 3 pour rappel).

On va exprimer ce volume en prenant le triangle ABC comme base et la hauteur relative à cette base sera égale à la distance d entre le point D et le plan (ABC).

On a donc $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{ABC} \times d = 3$

soit $\dfrac{1}{\cancel{3}} \times \dfrac{\cancel{3}\sqrt{22}}{2} \times d = 3 \rightarrow d = 3 : \left(\dfrac{\sqrt{22}}{2}\right)$

↳ on obtient une distance d égale à $\dfrac{6}{\sqrt{22}} = \dfrac{3\sqrt{22}}{11}$.

Exercice 4

① on a $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$

et, par produit, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\ln x)^2 = \boxed{+\infty}$

② a) on a $g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x}) \times (\ln \sqrt{x})$ avec $\ln \sqrt{x} = \ln(x^{1/2}) = \frac{1}{2}\ln(x)$

Donc $(g(\sqrt{x}))^2 = \left(\sqrt{x} \times \frac{1}{2} \times \ln(x)\right)^2 = (\sqrt{x})^2 \times \frac{1}{4} \times (\ln x)^2 = \frac{x(\ln x)^2}{4}$

et $4(g(\sqrt{x}))^2 = 4 \times \frac{x(\ln x)^2}{4} = x(\ln x)^2 = f(x)$.

on a bien obtenu l'égalité souhaitée.

b) avec les croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{X \to 0} X\ln(X) = 0$

Donc on a $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}\ln(\sqrt{x}) = 0$ soit $\lim\limits_{x \to 0} g(\sqrt{x}) = 0$

et on en déduit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \boxed{0}$

③ a) on utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$

avec $u(x) = x$ $\quad u'(x) = 1$

$v(x) = (\ln x)^2 \quad v'(x) = 2 \times (\ln x) \times \frac{1}{x}$

la dérivée de $\ln x$!!

petit rappel $(u^2)' = 2u \times u'$!!

On obtient $f'(x) = \underbrace{1 \times (\ln x)^2}_{u' \times v} + \underbrace{\cancel{x}}_{u} \times \underbrace{2\ln(x) \times \frac{1}{\cancel{x}}}_{v'}$

soit $f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln(x) = (\ln x)(\ln x + 2)$.

b) on résout $\ln x = 0 \rightarrow x = 1$

et $\ln x + 2 = 0 \rightarrow \ln x = -2 \rightarrow x = e^{-2}$ $(\simeq 0,135)$

on obtient alors le tableau suivant

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
signes de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

on a $f(1) = 1 \times (\ln 1)^2 = \boxed{0}$

et $f(e^{-2}) = e^{-2}(\ln e^{-2})^2 = e^{-2}(-2)^2 = 4e^{-2}$

c) sur $]0;1]$, le maximum de f est égal à $f(e^{-2}) = 4e^{-2} \simeq 0,54$

④ a) sur $]0;1]$, l'équation $f(x)=2$ n'a pas de solution car son maximum est égal à $4e^{-2}$ qui est inférieur à 2

sur $[1;+\infty[$, la fonction est continue et strictement croissante.

On a $f(1)=\boxed{0}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\boxed{+\infty}$.

On vérifie bien que $2\in[0;+\infty[$ et d'après le corollaire du T.V.I, l'équation $f(x)=2$ possède une unique solution sur $[1;+\infty[$ et donc sur $]0;+\infty[$.

b) à la calculatrice, on obtient $\boxed{2,4<\alpha<2,5}$

$f(2,4)\simeq 1,84$ et $f(2,5)\simeq 2,10$

⑤ a) La fonction f est positive sur $]0;1]$ et l'intégrale $\int_a^1 f(x)dx$ représente l'aire sous la courbe de f, c'est à dire l'aire délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites verticales d'équations $x=a$ et $x=1$.

b) On a $\int_a^1 f(x) = \int_a^1 \underbrace{x}_{v'}\underbrace{(\ln x)^2}_{u}dx$

on choisit $u(x)=(\ln x)^2$ afin de dériver cette fonction.

On a $u(x)=(\ln x)^2 \quad u'(x)=2(\ln x)\times\frac{1}{x}$

$v'(x)=x \quad v(x)=\frac{x^2}{2}$

on obtient $\int_a^1 \underbrace{x}_{v'}\underbrace{(\ln x)^2}_{u}dx = \left[\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v}\times\underbrace{(\ln x)}_{u}\right]_a^1 - \int_a^1 \underbrace{\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}}_{v}\times\underbrace{2(\ln x)\times\frac{1}{\cancel{x}}}_{u'}dx$

c'est à dire $\int_a^1 x(\ln x)^2dx = \frac{1^2}{2}\times\underbrace{\ln(1)}_{0} - \frac{a^2}{2}\ln a - \int_a^1 x\ln x\,dx$

(avec les simplifications)

soit $\int_a^1 x(\ln x)^2dx = -\frac{a^2}{2}\ln a - \int_a^1 x\ln x\,dx$

c) on s'intéresse maintenant à $I=\int_a^1 x\ln x\,dx$

et on faire à nouveau une intégration par parties en dérivant la fonction $x\to\ln x$.

On pose $v'(x) = x \quad v(x) = \dfrac{x^2}{2}$

$u(x) = \ln x \quad u'(x) = \dfrac{1}{x}$

on obtient $I = \displaystyle\int_a^1 \underbrace{x}_{v'} \underbrace{\ln x}_{u} \, dx = \left[\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} \underbrace{\ln x}_{u} \right]_a^1 - \int_a^1 \underbrace{\frac{x^{\cancel{2}}}{2}}_{v} \times \underbrace{\frac{1}{\cancel{x}}}_{u'} \, dx$

soit $I = \dfrac{1^2}{2} \underbrace{\ln 1}_{0} - \dfrac{a^2}{2} \ln a - \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_a^1 x \, dx$

$= -\dfrac{a^2}{2} \ln a - \dfrac{1}{2} \left[\dfrac{x^2}{2} \right]_a^1 = -\dfrac{a^2}{2} \ln a - \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{a^2}{2} \right)$

↳ $I = -\dfrac{a^2}{2} \ln a - \dfrac{1}{4} + \dfrac{a^2}{4}$

En reprenant le résultat du 5) b), on obtient

$\displaystyle\int_a^1 f(x) \, dx = -\frac{a^2}{2} (\ln a)^2 - \left(-\frac{a^2}{2} \ln a - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4} \right)$

$= -\dfrac{a^2}{2} (\ln a)^2 + \dfrac{a^2}{2} \ln a + \dfrac{1}{4} - \dfrac{a^2}{4}.$

d) avec les croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{a \to 0} a \ln a = 0$

et on en déduit $\lim\limits_{a \to 0} (a \ln a)^2 = \lim\limits_{a \to 0} a^2 (\ln a)^2 = 0$

et $\lim\limits_{a \to 0} a \times a \ln a = \lim\limits_{a \to 0} a^2 \ln a = 0$

on a bien sûr $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{a^2}{4} = 0$

Donc, par somme et différence des limites, on obtient :

$\lim\limits_{a \to 0} \displaystyle\int_a^1 f(x) \, dx = \boxed{\frac{1}{4}}$