Exercice 4

① on a $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^2 = +\infty$

et, par produit, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln x)^2 = \boxed{+\infty}$

② a) on a $g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})\times(\ln\sqrt{x})$ avec $\ln\sqrt{x} = \ln(x^{1/2}) = \frac{1}{2}\ln(x)$

Donc $(g(\sqrt{x}))^2 = \left(\sqrt{x}\times\frac{1}{2}\times\ln(x)\right)^2 = (\sqrt{x})^2\times\frac{1}{4}\times(\ln x)^2 = \dfrac{x(\ln x)^2}{4}$

et $4(g(\sqrt{x}))^2 = 4\times\dfrac{x(\ln x)^2}{4} = x(\ln x)^2 = f(x)$.

on a bien obtenu l'égalité souhaitée.

b) avec les croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{X\to 0} X\ln(X) = 0$

Donc on a $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}) = 0$ soit $\lim\limits_{x\to 0} g(\sqrt{x}) = 0$

et on en déduit $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \boxed{0}$

③ a) on utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$

avec $u(x) = x$ $\quad u'(x) = 1$

$v(x) = (\ln x)^2 \quad v'(x) = 2\times(\ln x)\times\frac{1}{x}$

la dérivée de $\ln x$!!

petit rappel $(u^2)' = 2u\times u'$!!

on obtient $f'(x) = \underbrace{1\times(\ln x)^2}_{u'\times v} + \underbrace{\cancel{x}}_{u}\times\underbrace{2\ln(x)\times\frac{1}{\cancel{x}}}_{v'}$

soit $f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln(x) = (\ln x)(\ln x + 2)$.

b) on résout $\ln x = 0 \rightarrow x = 1$

et $\ln x + 2 = 0 \rightarrow \ln x = -2 \rightarrow x = e^{-2}$ $(\simeq 0{,}135)$

on obtient alors le tableau suivant

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
signes de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

on a $f(1) = 1\times(\ln 1)^2 = \boxed{0}$

et $f(e^{-2}) = e^{-2}(\ln e^{-2})^2 = e^{-2}(-2)^2 = 4e^{-2}$

c) sur $]0;1]$, le maximum de f est égal à $f(e^{-2}) = 4e^{-2} \simeq 0{,}54$

④ a) sur $]0;1]$, l'équation $f(x)=2$ n'a pas de solution car son maximum est égal à $4e^{-2}$ qui est inférieur à 2

sur $[1;+\infty[$, la fonction est continue et strictement croissante.

On a $f(1)=\boxed{0}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\boxed{+\infty}$.

On vérifie bien que $2 \in [0;+\infty[$ et d'après le corollaire du T.V.I, l'équation $f(x)=2$ possède une unique solution sur $[1;+\infty[$ et donc sur $]0;+\infty[$.

b) à la calculatrice, on obtient $\boxed{2{,}4 < \alpha < 2{,}5}$

$f(2{,}4) \simeq 1{,}74$ et $f(2{,}5) \simeq 2{,}10$

⑤ a) La fonction f est positive sur $]0;1]$ et l'intégrale $\int_a^1 f(x)dx$ représente l'aire sous la courbe de f, c'est à dire l'aire délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites verticales d'équations $x=a$ et $x=1$.

b) On a $\int_a^1 f(x) = \int_a^1 \underbrace{x}_{v'} \underbrace{(\ln x)^2}_{u} dx$

on choisit $u(x)=(\ln x)^2$ afin de dériver cette fonction.

On a $u(x)=(\ln x)^2 \quad u'(x)=2(\ln x)\times\frac{1}{x}$

$v'(x)=x \quad v(x)=\frac{x^2}{2}$

on obtient $\int_a^1 \underbrace{x}_{v'} \underbrace{(\ln x)^2}_{u} dx = \left[\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v}\times \underbrace{(\ln x)}_{u}\right]_a^1 - \int_a^1 \underbrace{\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}}_{v}\times \underbrace{\cancel{2}(\ln x)\times\frac{1}{\cancel{x}}}_{u'}dx$

c'est à dire $\int_a^1 x(\ln x)^2 dx = \frac{1^2}{2}\times\underbrace{\ln(1)}_{0} - \frac{a^2}{2}\ln a - \int_a^1 x\ln x\, dx$

(avec les simplifications)

soit $\int_a^1 x(\ln x)^2 dx = -\frac{a^2}{2}\ln a - \int_a^1 x\ln x\, dx$

c) on s'intéresse maintenant à $I=\int_a^1 x\ln x\, dx$

et on faire à nouveau une intégration par parties en dérivant la fonction $x \to \ln x$.

On pose $v'(x) = x \quad v(x) = \frac{x^2}{2}$

$u(x) = \ln x \quad u'(x) = \frac{1}{x}$

on obtient $I = \int_a^1 \underbrace{x}_{v'} \underbrace{\ln x}_{u} \, dx = \left[\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} \underbrace{\ln x}_{u}\right]_a^1 - \int_a^1 \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} dx$

soit $I = \frac{1^2}{2} \underbrace{\ln 1}_{0} - \frac{a^2}{2}\ln a - \frac{1}{2}\int_a^1 x\,dx$

$= -\frac{a^2}{2}\ln a - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^1 = -\frac{a^2}{2}\ln a - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{2}\right)$

$\hookrightarrow I = -\frac{a^2}{2}\ln a - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}$

En reprenant le résultat du 5) b), on obtient

$\int_a^1 f(x)\,dx = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \left(-\frac{a^2}{2}\ln a - \frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}\right)$

$= -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}$.

d) avec les croissances comparées, on sait que $\lim_{a \to 0} a\ln a = 0$

et on en déduit $\lim_{a\to 0} (a\ln a)^2 = \lim_{a\to 0} a^2(\ln a)^2 = 0$

et $\lim_{a\to 0} a \times a\ln a = \lim_{a\to 0} a^2 \ln a = 0$

on a bien sûr $\lim_{a\to 0} \frac{a^2}{4} = 0$

Donc, par somme et différence des limites, on obtient :

$\lim_{a\to 0} \int_a^1 f(x)\,dx = \boxed{\frac{1}{4}}$