Exercice 3

1) On remplace t par 0 et on obtient $\begin{cases} x = 1 + 2\times 0 = 1 \\ y = 1 + 0 = 1 \\ z = 1 + 2\times 0 = 1 \end{cases}$ soit $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

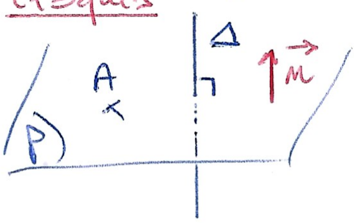
↳ ce sont bien les coordonnées du point $\boxed{C}$.

Par contre, pour le point A, on résout $\begin{cases} 1 + 2t = 4 \rightarrow t = \frac{3}{2} \\ 1 + t = 2 \rightarrow t = 1 \\ 1 + 2t = 2 \rightarrow t = \frac{1}{2} \end{cases}$

↳ on n'obtient pas la même valeur pour le paramètre t et le point A n'appartient pas à Δ.

croquis

2) a)



Le plan P doit passer par le point A et avoir un vecteur normal $\vec{n}$ colinéaire au vecteur directeur de Δ.

↳ on calcule $2x_A + y_A + 2z_A - 14 = 2\times 4 + 2 + 2\times 2 - 14 = 0 \rightarrow \boxed{A \in P}$

↳ l'équation cartésienne de P nous donne un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et la représentation paramétrique de Δ nous donne un vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ← ce sont les coefficients du paramètre t.

On a $\vec{n} = \vec{v}$ et ce plan est bien perpendiculaire à la droite Δ.

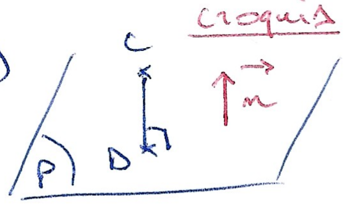
b) on calcule :

$2x_B + y_B + 2z_B - 14 = 2\times 5 + (-2) + 2\times 3 - 14 = 0 \rightarrow \boxed{B \in P}$

$2x_C + y_C + 2z_C - 14 = 2\times 1 + 1 + 2\times 1 - 14 = -9 \neq 0 \rightarrow \boxed{C \notin P}$

croquis

3) a)



On doit vérifier que le point D appartient à P et que les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

↳ on calcule $2x_D + y_D + 2z_D - 14 = 2\times 3 + 2 + 2\times 3 - 14 = 0 \rightarrow \boxed{D \in P}$

↳ on a $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on obtient $\overrightarrow{CD} = \vec{n}$ et les deux vecteurs sont bien colinéaires (avec un croquis "inexact" donc). un croquis reste juste un croquis...

b) On sait que les trois points A, B et D appartiennent à P.

Et on sait que le point C n'appartient pas à ce plan P.

Donc les quatre points ne sont pas coplanaires.

c) on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-4\\-2-2\\3-2\end{pmatrix} \to \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3-4\\2-2\\3-2\end{pmatrix} \to \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

on a donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 1\times(-1)+(-4)\times 0 + 1\times 1 = -1+0+1 = \boxed{0}$

d) on sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ soit $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$

↳ Le triangle ABD est donc rectangle en A.

On peut choisir ce triangle comme base du tétraèdre

avec $Aire_{ABD} = \dfrac{AB\times AD}{2}$

et la hauteur relative à cette base sera CD (d'après le 3) a))

On a donc $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{AB\times AD}{2}\right)\times CD$

or on connait déjà les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, de $\overrightarrow{AD}$ et de $\overrightarrow{CD}$.

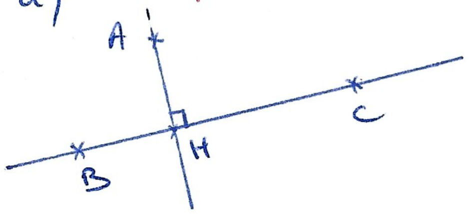
et on calcule $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(1)^2+(-4)^2+1^2} = \sqrt{18}$

$AD = \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{(-1)^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$

$CD = \|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$

on obtient donc $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{\sqrt{18}\times\sqrt{2}}{2}\right)\times 3 = \boxed{3}$ u.v.

4) a) croquis



On doit ici vérifier que le point H appartient bien à la droite (BC), c'est à dire que les points B, H et C sont alignés et on doit vérifier que $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$

⚠ Les calculs sont très fastidieux pour cette question ⚠ et on ne va pas tous les détailler

On a $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}73/29-5\\-4/29-(-2)\\51/29-3\end{pmatrix} \to \overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-\frac{72}{29}\\\frac{54}{29}\\-\frac{36}{29}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1-5\\1-(-2)\\1-3\end{pmatrix} \to \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}$

et on constate que $\overrightarrow{BH} = \dfrac{18}{29}\overrightarrow{BC}$ et les vecteurs sont bien colinéaires, et les points B, H et C sont bien alignés.

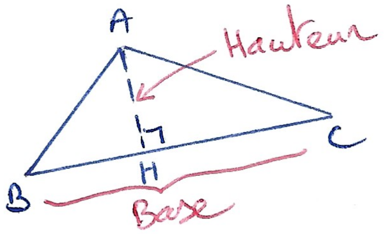
de plus, on a $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}73/29-4\\-4/29-2\\51/29-2\end{pmatrix} \to \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-\frac{43}{29}\\-\frac{62}{29}\\-\frac{7}{29}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}$

on calcule $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = -\dfrac{43}{29}\times(-4)+\left(-\dfrac{62}{29}\right)\times 3+\left(\dfrac{-7}{29}\right)\times(-2) = \boxed{0}$

Donc on a bien $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ et les conditions voulues sont bien vérifiées.

b) Dans le triangle ABC, [AH] va donc représenter la hauteur relative à la base [BC] de ce triangle.

croquis



On aura $\text{Aire}_{ABC} = \dfrac{BC \times AH}{2}$

et on calcule $BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

$$AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{\left(-\frac{43}{29}\right)^2 + \left(-\frac{62}{29}\right)^2 + \left(-\frac{7}{29}\right)^2} = \frac{3\sqrt{638}}{29}$$

on obtient donc $\text{Aire}_{ABC} = \dfrac{\sqrt{29} \times \dfrac{3\sqrt{638}}{29}}{2} = \boxed{\dfrac{3\sqrt{22}}{2}}$

c) on connait déjà le volume du tétraèdre ABCD (qui est égal à 3 pour rappel).

On va exprimer ce volume en prenant le triangle ABC comme base et la hauteur relative à cette base sera égale à la distance d entre le point D et le plan (ABC).

On a donc $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{ABC} \times d = 3$

soit $\frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}\sqrt{22}}{2} \times d = 3 \rightarrow d = 3 : \left(\frac{\sqrt{22}}{2}\right)$

↳ on obtient une distance d égale à $\dfrac{6}{\sqrt{22}} = \dfrac{3\sqrt{22}}{11}$.