Exercice 2

Partie A

(1) on résout l'équation $\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = x$ (équation pas si évidente)

↳ on obtient $2x = x(\sqrt{1+x^2})$

soit $2x - x(\sqrt{1+x^2}) = 0$

soit $x(2 - \sqrt{1+x^2}) = 0$ (équation produit nul)

$\boxed{x=0}$ ou $\sqrt{1+x^2} = 2$

$(\sqrt{1+x^2})^2 = 4$

$1+x^2 = 4$

$x^2 = 3 \rightarrow \boxed{x=\sqrt{3}}$ ou $\boxed{x=-\sqrt{3}}$

L'équation $f(x) = x$ a donc trois solutions : $-\sqrt{3}$; 0 ; $\sqrt{3}$

(2) a) on applique la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u(x) = 2x$ $\quad u'(x) = 2$

$v(x) = \sqrt{1+x^2}$ $\quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \times \underbrace{2x}_{\text{dérivée de } 1+x^2} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

On obtient $f'(x) = \frac{2\times\sqrt{1+x^2} - 2x \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2}$

↳ $f'(x) = \frac{\frac{2(\sqrt{1+x^2})^2 - 2x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2}$ $\quad (\sqrt{1+x^2})^2 = 1+x^2$

on obtient $f'(x) = \frac{\frac{2(1+x^2) - 2x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{\frac{2 + \cancel{2x^2} - \cancel{2x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$

et on a bien $f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ car $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c}$

b) on a $1+x^2 > 0$ et $\sqrt{1+x^2} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc on a $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$

et la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Partie B

① initialisation

on a $U_0 = 1$ et $U_1 = f(U_0) = \dfrac{2u_0}{\sqrt{1+U_0^2}} = \dfrac{2\times 1}{\sqrt{1+1^2}} = \sqrt{2}$

Donc on a bien $1 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant \sqrt{2}$

→ la propriété est vérifiée au rang 0.

Hérédité

on suppose la propriété vraie au rang n

→ on a $1 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant \sqrt{3}$

On applique la fonction f qui est croissante sur $\mathbb{R}$ et qui CONSERVE l'ordre.

On obtient $f(1) \leqslant f(U_n) \leqslant f(U_{n+1}) \leqslant f(\sqrt{3})$

soit $(1 \leqslant)\ \sqrt{2} \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant \sqrt{3}$

→ la propriété reste bien vérifiée au rang $(n+1)$ et, d'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout n.

② La suite (U_n) est donc croissante (car $U_n \leqslant U_{n+1}$) et majorée (car $U_n \leqslant \sqrt{3}$).

D'après le théorème de convergence monotone, on sait que la suite (U_n) est convergente.

Du coup, la suite (U_n) est convergente et définie par $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ de la suite devra vérifier l'équation $f(\ell) = \ell$.

D'après la partie A, on sait que cette équation a trois solutions $(-\sqrt{3} ; 0 ; \sqrt{3})$.

Mais les termes U_n étant compris entre 1 et $\sqrt{3}$, la seule solution possible est $\boxed{\ell = \sqrt{3}}$

③ a) On a $V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1}^2}{3 - U_{n+1}^2} = \dfrac{\left(\dfrac{2U_n}{\sqrt{1+U_n^2}}\right)^2}{3 - \left(\dfrac{2U_n}{\sqrt{1+U_n^2}}\right)^2} = \dfrac{\dfrac{4U_n^2}{1+U_n^2}}{3 - \dfrac{4U_n^2}{1+U_n^2}}$

On obtient $V_{n+1} = \dfrac{\dfrac{4U_n^2}{1+U_n^2}}{\dfrac{3(1+U_n^2) - 4U_n^2}{1+U_n^2}} = \dfrac{4U_n^2}{3 - U_n^2} = 4 \times \dfrac{U_n^2}{3 - U_n^2} = 4V_n$

$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \dfrac{a}{\cancel{b}} \times \dfrac{\cancel{b}}{c} = \dfrac{a}{c}$!!

Donc la suite (V_n) est bien géométrique de raison $\boxed{4}$,

avec $V_0 = \dfrac{U_0^2}{3-U_0^2} = \dfrac{1^2}{3-1^2} = \dfrac{1}{2} = \boxed{0,5}$

b) on a donc $\boxed{V_n} = V_0 \times q^{(n-0)} = \boxed{0,5 \times 4^n}$

et on utilise la relation $V_n = \dfrac{U_n^2}{3-U_n^2}$ afin

d'exprimer U_n en fonction de V_n.

On a $V_n = \dfrac{U_n^2}{3-U_n^2}$ soit $V_n(3-U_n^2) = U_n^2$

soit $3V_n - V_n \times U_n^2 = U_n^2$

soit $U_n^2 + V_n \times U_n^2 = 3V_n$

soit $U_n^2(1+V_n) = 3V_n$

$\rightarrow U_n^2 = \dfrac{3V_n}{1+V_n}$

on obtient $U_n = \sqrt{\dfrac{3V_n}{1+V_n}}$

$\rightarrow U_n = \sqrt{\dfrac{3 \times 0,5 \times 4^n}{1+0,5\times 4^n}} = \sqrt{\dfrac{1,5 \times 4^n}{1+0,5 \times 4^n}}$

c) En factorisant par 4^n, on obtient :

$U_n = \sqrt{\dfrac{\cancel{4^n} \times 1,5}{\cancel{4^n}\left(\frac{1}{4^n}+0,5\right)}} \rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{\dfrac{1,5}{0,5}} = \boxed{\sqrt{3}}$

on simplifie

tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$

Partie C

① on aura $U = 1$

on écrit u*u pour u^2

$S = S + u*u$

$u = 2*u/sqrt(1+u*u)$

② on a $1 \leq U_k \leq \sqrt{3}$ Donc on aura $1 \leq U_k^2 \leq 3$ $(\sqrt{3})^2$

Donc S_n est constituée par la somme de n termes tous compris entre 1 et n $\rightarrow$ donc $1 \times n \leq S_n \leq 3 \times n$

soit $\boxed{n \leq S_n \leq 3n}$

③ on a donc $S_n \geq n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

et, par comparaison, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \boxed{+\infty}$

④ on a $n \leq S_n \leq 3n \rightarrow \dfrac{n}{n^2} \leq \dfrac{S_n}{n^2} \leq \dfrac{3n}{n^2} \rightarrow \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{S_n}{n^2} \leq \dfrac{3}{n}$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{n}\right) = 0$

D'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n^2} = \boxed{0}$