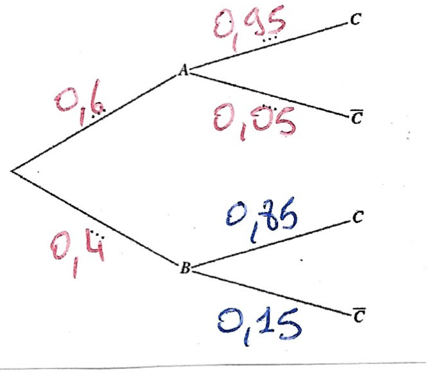
Exercice 1

Partie A

① on a l'arbre suivant



on a $p(A) = 60\% = 0,6$

$p(B) = 1 - 0,6 = 0,4$

et $p(C) = 0,91$ ne peut pas être placée dans l'arbre.

② ⓐ on calcule $p(A \cap C) = p(A) \times p_A(C) = 0,6 \times 0,95 = \boxed{0,57}$

ⓑ on cherche $p_B(C) = \dfrac{p(B \cap C)}{p(B)}$

or, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$p(C) = p(B \cap C) + p(A \cap C)$ $\quad (0,91 - 0,57)$

$\hookrightarrow \quad 0,91 = p(B \cap C) + 0,57 \rightarrow p(B \cap C) = 0,34$

On en déduit $p_B(C) = \dfrac{p(B \cap C)}{p(B)} = \dfrac{0,34}{0,4} = \boxed{0,85}$

ⓒ on calcule $p_{\overline{C}}(A) = \dfrac{p(A \cap \overline{C})}{p(\overline{C})} = \dfrac{0,6 \times 0,05}{0,09} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

$\leftarrow 1 - 0,91$

et $p_{\overline{C}}(B) = \dfrac{p(B \cap \overline{C})}{p(\overline{C})} = \dfrac{p(B) \times p_B(\overline{C})}{p(\overline{C})}$

avec $p_B(C) = 0,85$ donc $p_B(\overline{C}) = 0,15$

(on a complété l'arbre en bleu).

$\hookrightarrow p_{\overline{C}}(B) = \dfrac{0,4 \times 0,15}{0,09} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

Donc on a $p_{\overline{C}}(B) = 2 \times p_{\overline{C}}(A)$ ou $p_{\overline{C}}(A) = \dfrac{1}{2} \times p_{\overline{C}}(B)$.

$\rightarrow$ Le responsable des achats a donc raison.

Partie B

① ⓐ on aura $n = \boxed{15}$ et $p = p(\overline{C}) = \boxed{0,09}$

ⓑ on cherche $p(X=2) = \binom{15}{2} \times 0,09^2 \times (1-0,09)^{15-2}$

ou on utilise directement la calculatrice,

et on obtient $p(X=2) \approx \boxed{0,250}$

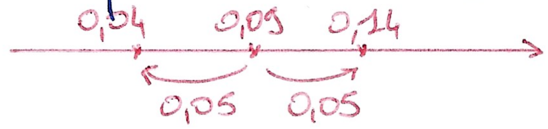
ⓒ on aura $p(X \leq 2) \approx \boxed{0,853}$ (à la calculatrice)

② a) on a $E(F_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \times E(X_n) = \frac{1}{\cancel{n}} \times (\cancel{n} \times p) = \boxed{0{,}09}$

et $V(F_n) = V\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(X_n) = \frac{1}{n^{\cancel{2}}}(\cancel{n} \times p \times (1-p)) = \frac{0{,}09 \times 0{,}91}{n} = \boxed{\frac{0{,}0819}{n}}$

les variables sont indépendantes

b) Les inégalités $0{,}04 < F_n < 0{,}14$ correspondent à écrire que $|F_n - 0{,}09| < 0{,}05$ car



soit $|F_n - E(F_n)| < 0{,}05$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous donne

$$p(|F_n - E(F_n)| \geq 0{,}05) \leq \frac{V(F_n)}{0{,}05^2}$$

$$\rightarrow p(|F_n - E(F_n)| \geq 0{,}05) \leq \frac{0{,}0819}{n \times 0{,}05^2}$$

$$\frac{0{,}0819}{0{,}05^2} = 32{,}76$$

$$\rightarrow 1 - p(|F_n - E(F_n)| < 0{,}05) \leq \frac{32{,}76}{n}$$

car $p(|F_n - E(F_n)| \geq 0{,}05) = 1 - p(|F_n - E(F_n)| < 0{,}05)$

et on a bien $p(|F_n - E(F_n)| < 0{,}05) \geq 1 - \frac{32{,}76}{n}$

c'est à dire $p(0{,}04 < F_n < 0{,}14) \geq 1 - \frac{32{,}76}{n}$

ⓒ on a ici $F_n = \frac{55}{500} = 0{,}11$ (c'est la fréquence de tomates non commercialisables)

et l'expression $1 - \frac{32{,}76}{n}$ devient $1 - \frac{32{,}76}{500} \simeq 0{,}93448$

Donc la fréquence F_{500} est bien comprise entre 0,04 et 0,14 et la probabilité que ce soit bien le cas est supérieure ou égale à 0,93448 (soit 93,448 %).

Donc le responsable des achats pouvait largement s'attendre à ce résultat pour son échantillon de 500 tomates.