BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le sujet est constitué de quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 (4 points)

Un supermarché dispose d'un stock de tomates provenant de deux fournisseurs A et B.

Il a été constaté que :

- $91\ \%$ du stock de tomates est commercialisable ;
- $60\ \%$ du stock de tomates provient du fournisseur A ;
- parmi les tomates provenant du fournisseur A, la proportion de tomates commercialisables est de $95\ \%$.

On choisit au hasard une tomate dans le stock.

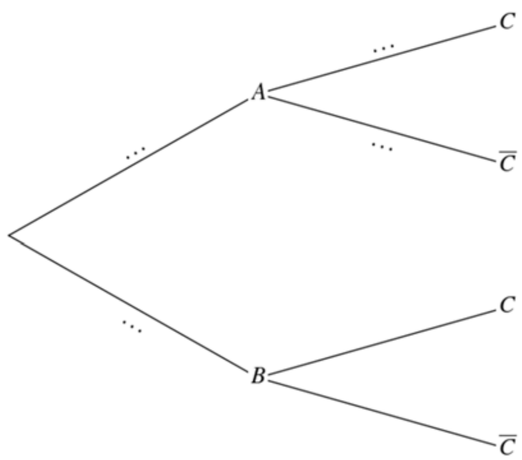
On désigne par :

- A l'événement « La tomate provient du fournisseur A » ;
- B l'événement « La tomate provient du fournisseur B » ;
- C l'événement « La tomate est commercialisable ».

Pour un événement quelconque E, on note $P(E)$ la probabilité de E.

Partie A

1. Recopier l'arbre ci-dessous en complétant les pointillés.



2. a. Déterminer la probabilité que la tomate choisie soit commercialisable et provienne du fournisseur A.
   b. Démontrer que $P_B(C) = 0{,}85$.
   c. La tomate choisie est non commercialisable. Le responsable des achats estime qu'il y a deux fois moins de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B. A-t-il raison ?

Partie B

On rappelle que $9\ \%$ des tomates du stock ne sont pas commercialisables.

1. On prend 15 tomates dans le stock au hasard et de manière indépendante. On considère que le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables dans cet échantillon de 15 tomates.

   a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. En préciser les paramètres.
   b. Déterminer la probabilité qu'exactement deux tomates soient non commercialisables.
   On donnera la valeur arrondie au millième.
   c. Déterminer la probabilité qu'au plus deux tomates soient non commercialisables.
   On donnera la valeur arrondie au millième.

2. On constitue désormais un échantillon de n tomates, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel non nul.
   On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables et F_n la variable aléatoire égale à la fréquence de tomates non commercialisables dans cet échantillon de n tomates.
   On a donc $F_n = \frac{X_n}{n}$.
   On admet que la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $0{,}09$.

   a. Calculer l'espérance $E(F_n)$ et exprimer la variance $V(F_n)$ en fonction de n.
   b. Démontrer que $P(0{,}04 < F_n < 0{,}14) \geq 1 - \frac{32{,}76}{n}$.
   c. Le responsable des achats prélève dans le stock un échantillon de 500 tomates. Il s'aperçoit que 55 tomates ne sont pas commercialisables. Est-ce conforme à ce qu'il pouvait attendre ? Justifier la réponse.

Exercice 2 (6 points)

Partie A : étude du sens de variation d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

2. a. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Vérifier que, pour tout réel x, on a $f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

3. Le but de cette question est de retrouver par une autre méthode les résultats de la question 2. de la **partie B**.

   Pour tout entier naturel n, on pose :
   $$v_n = \frac{u_n^2}{3-u_n^2} .$$

   On admet que la suite (v_n) est bien définie.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 4 dont on précisera le premier terme.
   b. En déduire une expression de v_n en fonction de n puis que $u_n = \sqrt{\frac{1{,}5\times 4^n}{1+0{,}5\times 4^n}}$ pour tout entier naturel n.
   c. En déduire la limite de la suite (u_n).

Partie C : étude de la convergence de la somme de termes

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_{n-1}^2$.

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci permette de lister les p premiers termes de la suite (S_n).

```
from math import*

def termes(p) :
     u=…
     S=0
     L=[]
     for i in range(p) :
          S=…
          u=…
          L.append(S)
     return L
```

Remarque : on rappelle qu'en langage Python,

- la commande `L=[]` crée une liste vide ;
- la commande `L.append(S)` ajoute, à la fin de la liste `L`, l'élément supplémentaire `S`.

2. On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a $1 \leq u_k \leq \sqrt{3}$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $n \leq S_n \leq 3n$.

3. En déduire les limites respectives de S_n et de $\frac{S_n}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On considère :

- les points $A(4\,;2\,;2)$, $B(5\,;-2\,;3)$ et $C(1\,;1\,;1)$;
- la droite Δ dont une représentation paramétrique est donnée par
$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = 1+2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \quad ;$$
- le plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et perpendiculaire à la droite Δ.

1. Vérifier que la droite Δ passe par le point $C(1\,;1\,;1)$ mais pas par le point A.

2. a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $2x+y+2z-14=0$.
   b. Vérifier que le plan $\mathcal{P}$ passe par le point B mais pas par le point C.

3. On considère le point $D(3\,;2\,;3)$.
   a. Démontrer que le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathcal{P}$.
   b. Justifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
   d. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.
   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V=\frac{1}{3}\times B\times h$ où B *est l'aire d'une base du tétraèdre et* h *la hauteur relative à cette base*.

4. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).
   a. Vérifier que les coordonnées du point H sont $\left(\frac{73}{29}\,;\,\frac{-4}{29}\,;\,\frac{51}{29}\right)$.
   b. Démontrer que l'aire du triangle ABC est $\frac{3\sqrt{22}}{2}$.
   c. En déduire la distance du point D au plan (ABC).

Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = x \ln x$.
   a. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) = 4\left(g(\sqrt{x})\right)^2$.
   b. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

3. Dans cette question, on étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   a. Démontrer que sur l'intervalle $]0;+\infty[$ $f'(x) = (\ln x)(2 + \ln x)$.
   b. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   c. Donner la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $]0;1]$.

4. On considère l'équation $f(x) = 2$.
   a. Justifier que, sur l'intervalle $]0;+\infty[$, cette équation admet une unique solution. On note α cette solution.
   b. Donner un encadrement de α d'amplitude $0{,}1$.

5. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;1]$.
   a. Donner une interprétation géométrique de $\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   b. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :
   $$\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_1^a x \ln x \, \mathrm{d}x .$$
   c. En utilisant à nouveau une intégration par parties, démontrer que :
   $$\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4} .$$
   d. Déterminer la limite de $\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x$ quand a tend vers 0.