Bac Spé Maths 2025
Voici la correction complète
pour le sujet de secours
du jour 2
du sujet Amérique du Nord
22 Mai 2025

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A

1) $\boxed{\text{en } -\infty}$, il n'y a pas de forme indéterminée

on a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$

on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} (\underbrace{x e^{-x}}_{\underbrace{(-\infty)\times(+\infty)}_{-\infty}} + \underbrace{2x - 1}_{-\infty}) = \boxed{-\infty}$ (par somme des limites)

$\boxed{\text{en } +\infty}$, on doit utiliser les croissances comparées car il y a une forme indéterminée pour xe^{-x} !

↳ avec les croissances comparées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$

on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} (\underbrace{x e^{-x}}_{0} + \underbrace{2x - 1}_{+\infty}) = \boxed{+\infty}$ (par somme des limites)

2) on a $f(x) = \underbrace{x}_{u} \times \underbrace{e^{-x}}_{v} + 2x - 1$

dérivée de $2x-1$

et on obtient $f'(x) = \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{e^{-x}}_{v} + \underbrace{x}_{u} \times \underbrace{(-e^{-x})}_{v'} + 2$

soit $\boxed{f'(x) = e^{-x}(1-x) + 2}$

3) on a $f'(x) = \underbrace{e^{-x}}_{u} \times \underbrace{(1-x)}_{v} + 2$

et on obtient $f''(x) = \underbrace{-e^{-x}}_{u'} \times \underbrace{(1-x)}_{v} + \underbrace{e^{-x}}_{u} \times \underbrace{(-1)}_{v'}$

soit $f''(x) = e^{-x}(-1+x-1) = \boxed{e^{-x}(x-2)}$.

4) on étudie le signe de $f''(x)$.

↳ on obtient

x	$-\infty$	2	$+\infty$
e^{-x}	$+$	⋮	$+$
$x-2$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
fonction f	CONCAVE	⋮	CONVEXE

point d'inflexion.

Donc la fonction f est concave sur $]-\infty ; 2]$ et convexe sur $[2 ; +\infty[$.

5) Le signe de $f''(x)$ va nous donner les variations de la fonction f'.

On obtient

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f'		$\searrow$	$2-e^{-2}$	$\nearrow$	

on calcule la valeur du minimum

$$f'(2) = e^{-2}(1-2)+2 = -e^{-2}+2 = 2-e^{-2}.$$

6) Le minimum de f' est égal à $2-e^{-2}$ qui est strictement positif $\rightsquigarrow$ f' sera donc strictement positive sur $\mathbb{R}$ et f sera donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

7) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]-\infty\,;+\infty[$.

on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et on a $0 \in\ ]-\infty\,;+\infty[$.

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Donc, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique sur $]-\infty\,;+\infty[$.

↳ avec la calculatrice, on obtient : $0{,}37 < \alpha < 0{,}38$

8) on s'intéresse à $f(x)-y$

$$= xe^{-x}+2x-1-(2x-1) = xe^{-x}$$

avec $e^{-x} > 0$ pour tout x.

Donc $f(x)-y \leq 0$ pour $x \leq 0$

et $f(x)-y \geq 0$ pour $x \geq 0$

Donc $\mathscr{C}_f$ est en dessous de Δ pour $x \leq 0$

et $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Δ pour $x \geq 0$.

Partie B

1) On a $I_n = \int_1^n \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^{-x}}_{v'} dx$ → On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$
on a $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$

↳ on obtient $I_n = \left[\underbrace{x}_{u}\underbrace{(-e^{-x})}_{v} \right]_1^n - \int_1^n \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{(-e^{-x})}_{v} dx$

soit $I_n = n(-e^{-n}) - 1 \times (-e^{-1}) + \int_1^n e^{-x} dx$

$= -ne^{-n} + e^{-1} + \left[-e^{-x} \right]_1^n$

$= -ne^{-n} + e^{-1} + (-e^{-n}) - (-e^{-1})$

$= -ne^{-n} - e^{-n} + 2e^{-1}$

2) a) Les bornes 1 et n du domaine D_n sont incluses dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$ dans lequel on sait que $\mathcal{C}_f$ est bien au dessus de Δ.

Donc on a bien Aire $D_n = \int_1^n (f(x) - y)\, dx = \int_1^n x e^{-x} dx = I_n$.

b) on a donc Aire $D_n = -ne^{-n} - e^{-n} + 2e^{-1}$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} ne^{-n} = 0$ (par croissances comparées)

et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$.

On en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty}$ Aire $D_n = \boxed{2e^{-1}} = \boxed{\dfrac{2}{e}}$

Exercice 2

AFFIRMATION 1

Un vecteur directeur de la droite D sera $\vec{v_D}\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$

et un vecteur directeur de la droite D' sera $\vec{v_{D'}}\begin{pmatrix}2\\-6\\-8\end{pmatrix}$.

↳ on constate que $\vec{v_{D'}} = -2\vec{v_D}$ → les vecteurs sont colinéaires.

et les droites sont donc bien parallèles. → $\boxed{\text{VRAIE}}$

AFFIRMATION 2

Les points A, B et C ne sont pas alignés et on va donc considérer les deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ (non colinéaires).

On va vérifier si on a $\vec{v_D}\cdot\vec{AB} = 0$ et $\vec{v_D}\cdot\vec{AC} = 0$

↳ vecteur directeur de la droite D.

↳ on a $\vec{v_D}\cdot\vec{AB} = \begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix} = -1\times 3 + 3\times 0 + 4\times(-5)$
$= -23 \neq 0$.

Donc $\vec{v_D}$ n'est pas orthogonal à $\vec{AB}$

Donc la droite D n'est pas orthogonale au plan (ABC) → $\boxed{\text{FAUSSE}}$

AFFIRMATION 3

On résout le système $\begin{cases} 3 - t = -4 + 2t' \\ -2 + 3t = 1 - 3t' \\ 1 + 4t = 2 + t' \end{cases}$ on utilise cette équation pour isoler t'.

on obtient $\begin{cases} 3 - t = -4 + 2(4t-1) \\ -2 + 3t = 1 - 3(4t-1) \\ t' = 4t - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 - t = -4 + 8t - 2 \\ -2 + 3t = 1 - 12t + 3 \\ t' = 4t - 1 \end{cases}$

et on obtient $\begin{cases} t = \frac{-9}{-9} = 1 \\ t = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \\ t' = 4t - 1 \end{cases}$ → les deux équations nous donnent des valeurs de t différentes → impossible !

Donc le système n'admet pas de solutions

Donc les droites ne sont pas sécantes → $\boxed{\text{FAUSSE}}$

AFFIRMATION 4

on commence par vérifier si le point F appartient bien au plan.

↳ on teste les coordonnées de F avec l'équation cartésienne de P.

On a : $2\times(-3)-3\times(-3)+3-6=-6+9+3-6=\boxed{0} \rightarrow \boxed{OK}$

et on vérifie que le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est bien colinéaire au vecteur normal $\vec{n}$ de P.

On a $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-3-(-5)\\-3-0\\3-2\end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ et on a $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{EF}=\vec{n}$

donc $\overrightarrow{EF}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, et $\overrightarrow{EF}$ est bien orthogonal à P $\rightarrow \boxed{OK}$

$\rightarrow$ **VRAIE**

AFFIRMATION 5

il faut ici que le vecteur normal $\vec{n'}$ au plan P' soit orthogonal au vecteur directeur $\vec{v_\Delta}$ de la droite Δ.

↳ on va utiliser le produit scalaire.

on calcule $\vec{n'}\cdot\vec{v_\Delta}=\begin{pmatrix}-3\\1\\-a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}=-3\times(-1)+1\times3+(-a^2)\times4$

$=3+3-4a^2=-4a^2+6$

on veut $\vec{n'}\cdot\vec{v_\Delta}=0$ soit $-4a^2+6=0 \rightarrow a^2=\frac{3}{2}$

et il y a donc <u>deux valeurs possibles</u> : $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\rightarrow$ **FAUSSE**

Exercice 3

1) on a $p(C) = \boxed{0{,}02}$, $p(V) = \boxed{0{,}9}$ et $p_C(V) = \boxed{0{,}62}$

2) a) on calcule $p(C \cap V) = p_C(V) \times p(C) = 0{,}62 \times 0{,}02 = \boxed{0{,}0124}$

b) Avec la formule des probabilités totales, on a :

$$p(V) = p(C \cap V) + p(\overline{C} \cap V)$$

et on obtient $0{,}9 = 0{,}0124 + p(\overline{C} \cap V)$

soit $p(\overline{C} \cap V) = 0{,}9 - 0{,}0124 = \boxed{0{,}8876}$

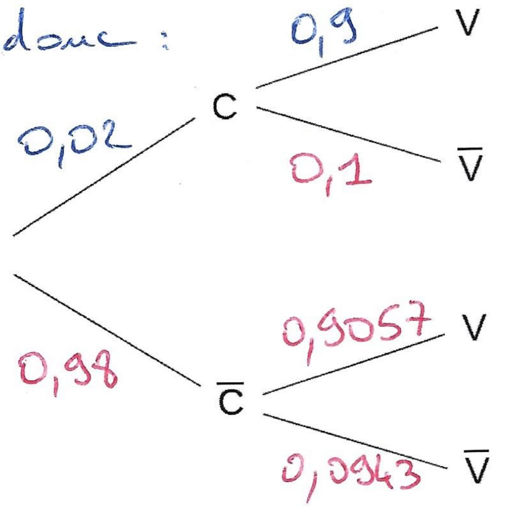
3) on doit encore calculer certaines probabilités !

↳ on calcule $p_{\overline{C}}(V) = \dfrac{p(\overline{C} \cap V)}{p(\overline{C})} = \dfrac{0{,}8876}{0{,}98} \approx \boxed{0{,}9057}$

$1 - p(C) = 1 - 0{,}02$

et on en déduit $p_{\overline{C}}(\overline{V}) = 1 - p_{\overline{C}}(V) = 1 - 0{,}9057$
$= \boxed{0{,}0943}$

on obtient donc :



4) on calcule $p_V(C) = \dfrac{p(C \cap V)}{p(V)} = \dfrac{0{,}0124}{0{,}9} \approx \boxed{0{,}0138}$

↳ parmi les personnes vaccinées, il y aura 1,38% de personnes contaminées par le virus.

5) a) on veut comparer $p_{\overline{C}}(V) = 0{,}9057$
et $p_{\overline{C}}(\overline{V}) = 0{,}0943$

mais $10 \times p_{\overline{C}}(\overline{V}) = 10 \times 0{,}0943 = 0{,}943 \neq 0{,}9057$

et l'affirmation est donc $\boxed{\text{FAUSSE}}$

b) on s'intéresse ici à $P_r(\overline{C}) = 1 - P_r(C)$

$= 1 - 0{,}0138$

$= 0{,}9862 > 0{,}98$

et l'affirmation est donc bien $\boxed{\text{VRAIE}}$

6) a) on a bien ici des épreuves identiques et indépendantes avec deux issues possibles.

On a donc ici une loi binomiale de paramètres

$n = 20$ et $p = p(c) = 0{,}02$.

b) on cherche $p(X=4) = \binom{20}{4} \times p^4 \times (1-p)^{20-4}$

$\hookrightarrow p(X=4) = \binom{20}{4} \times 0{,}02^4 \times 0{,}98^{16}$.

et, en utilisant les fonctionnalités de la calculatrice,

on obtiendra $p(X=4) \approx \boxed{0{,}0006}$

Exercice 4

Partie A

1) sous forme décimale, on obtient :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0,375	0,25	0,15625

on a $U_3 = U_2 - \frac{1}{4}U_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = 0,375$

2) il semble bien que la suite tende vers zéro !

Partie B

1) on a $W_0 = U_1 - \frac{1}{2}U_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 0 = \boxed{\frac{1}{2}}$

2) on a $W_{n+1} = U_{n+2} - \frac{1}{2}U_{n+1}$

$= U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n - \frac{1}{2}U_{n+1}$

on en déduit $W_{n+1} = \frac{1}{2}U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n = \frac{1}{2}\left(U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n\right) = \boxed{\frac{1}{2}W_n}$

et (W_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3) on a $W_n = W_0 \times q^{(n-0)} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

4) on sait que $W_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$

et on en déduit $U_{n+1} = W_n + \frac{1}{2}U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}U_n$

5) initialisation

on sait que $U_0 = 0$

et on vérifie bien $U_0 = 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0$.

↳ la formule est vérifiée au rang 0.

Hérédité

on suppose que l'on a $U_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

et on veut montrer $U_{n+1} = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

c'est une récurrence de type 2 sur ce site (voir les fiches concernées) → on veut démontrer une formule.

on part donc de $U_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} U_n$ — on remplace U_n avec l'hypothèse de récurrence.

et on obtient $U_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\left(n\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)$

soit $U_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(n+1) \rightarrow \boxed{OK}$

↳ on a bien le résultat souhaité avec le principe de récurrence.

Partie C

1) on calcule $U_{n+1} - U_n = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}(n+1) - n\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times \frac{1}{2}(1-n)$$

et on a donc $U_{n+1} - U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(1-n)$

avec $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$ pour tout n et $(1-n) \leq 0$ pour $n \geq 1$

Donc on a $U_{n+1} - U_n \leq 0$ à partir du rang 1

↳ (U_n) est décroissante à partir du rang 1.

2) on a $U_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n} > 0$ pour tout n.

La suite (U_n) est donc minorée par 0 et elle est décroissante → d'après le théorème de la convergence monotone, on en déduit que (U_n) converge.

3) en partant de $U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{1}{4} U_n$,

on obtiendrait $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$

On résout $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell \rightarrow -\frac{1}{4}\ell = 0 \rightarrow \ell = \boxed{0}$

et on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \boxed{0}$.