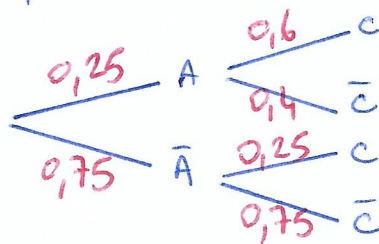


Bac Spé Maths 2025
Voici la correction complète
du jour 1
pour le sujet Nouvelle-Calédonie
Jeudi 20 Novembre 2025

Correction proposée par
Bruno Swiners
www.coursmathsaiix.fr

Exercice 1

- 1) on va écrire les probabilités avec leur écriture décimale.
Par exemple, on a $p(A) = \frac{1}{4} = 0,25$ et $p_A(C) = \frac{3}{5} = 0,6$
on obtient l'arbre suivant:



- 2) on cherche $p(A \cap C) = p(A) \times p_A(C) = 0,25 \times 0,6 = \boxed{0,15}$
- 3) pour $p(C)$, on utilise la formule des probabilités totales
↳ on a $p(C) = p(A \cap C) + p(\bar{A} \cap C)$
 $= 0,15 + 0,75 \times 0,25 = \boxed{0,3375}$
- 4) on s'intéresse ici à $p_{\bar{C}}(\bar{A})$ avec $p(\bar{C}) = 1 - p(C) = 0,6625$
↳ on a $p_{\bar{C}}(\bar{A}) = \frac{p(\bar{A} \cap \bar{C})}{p(\bar{C})} = \frac{0,75 \times 0,75}{0,6625} \approx 0,85 > 0,80$
Donc l'affirmation est vraie.
- 5) on peut faire un petit tableau pour cette loi de probabilité.

x_i	50	10
p_i	0,3375	0,6625

Le joueur peut gagner
10 euros ou 50 euros !

$$\text{on a } E(X_1) = \sum_i p_i x_i = 50 \times 0,3375 + 10 \times 0,6625 = \boxed{23,5} \text{ euros}$$

pour la variance, on va utiliser la formule suivante:

$$\begin{aligned} V(X_1) &= E(X_1^2) - (E(X_1))^2 \\ &= (50^2 \times 0,3375 + 10^2 \times 0,6625) - (23,5)^2 \\ &= \boxed{357,75} \end{aligned}$$

- 6) a) par linéarité de l'espérance, on sait que

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) \\ &= 23,5 + 23,5 = \boxed{47} \text{ euros} \end{aligned}$$

- b) Les variables X_1 et X_2 étant indépendantes,

$$\begin{aligned} \text{on a } V(Y) &= V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) \\ &= \boxed{715,5} \end{aligned}$$

7) En généralisant les résultats de la question 6,
on aura $E(Z) = E(X_1) + \dots + E(X_{100}) = 23,5 \times 100$
 $= \boxed{2350} \text{ euros}$

$$\text{et } V(Z) = V(X_1) + \dots + V(X_{100}) = 357,75 \times 100 \\ = \boxed{35775}$$

on s'intéresse ici à $Z \in]1950; 2750[$ et cet intervalle
est centré sur la valeur 2350 de l'espérance $E(Z)$.

↳ on reconnaît l'utilisation de l'inégalité de
Bienaymé Tchebichev.

On cherche $P(|Z - E(Z)| < 400)$

$$\text{avec } P(|Z - E(Z)| \geq 400) = 1 - P(|Z - E(Z)| < 400)$$

et on sait avec cette inégalité de Bienaymé Tchebichev
que $P(|Z - E(Z)| \geq 400) \leq \frac{V(Z)}{400^2}$

$$\text{soit } P(|Z - E(Z)| \geq 400) \leq \frac{35775}{400^2}$$

$$\text{soit } 1 - P(|Z - E(Z)| < 400) \leq \frac{35775}{400^2}$$

$$\text{et on obtient } P(|Z - E(Z)| < 400) \geq 1 - \frac{35775}{400^2} \\ \approx 0,776$$

↳ on obtient bien $P(|Z - E(Z)| < 400) \geq 0,75$.

Exercice 2

2) on peut ici utiliser le produit scalaire en montrant que $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$ c'est à dire $[AB] \perp [BC]$.

$$\text{on a } \vec{AB} \begin{pmatrix} 5-4 \\ -3-(-4) \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{BC} \begin{pmatrix} 6-5 \\ -2-(-3) \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \text{on calcule } \vec{AB} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1 \times 1 + (-2) \times 1 = \boxed{0}$$

Donc on a bien $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \rightarrow$ le triangle ABC est rectangle en B.

2) on peut se contenter ici de vérifier que les coordonnées des points A, B et C vérifient bien l'équation proposée.

$$\text{On a } x_A - y_A - z = 4 - (-4) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0 \rightarrow \boxed{\text{OK}}$$

$$x_B - y_B - z = 5 - (-3) - 8 = 5 + 3 - 8 = 0 \rightarrow \boxed{\text{OK}}$$

$$x_C - y_C - z = 6 - (-2) - 8 = 6 + 2 - 8 = 0 \rightarrow \boxed{\text{OK}}$$

Donc l'équation proposée correspond bien au plan (ABC).

3) a) La droite d sera dirigée par un vecteur colinéaire au vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ du plan (ABC).

$\hookrightarrow$ on va écrire la représentation paramétrique de la droite d avec le point D et le vecteur $\vec{n}$.

$$\text{on obtient } \begin{cases} x = 5 + 1 \times t \\ y = 1 + (-1) \times t \\ z = 1 + 0 \times t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{avec} \\ t \in \mathbb{R} \end{array}$$

point D vecteur $\vec{n}$

b) Ce point H correspond à l'intersection entre la droite d et le plan (ABC).

$$\text{On résout: } (5+t) - (1-t) - 8 = 0$$

$$\text{soit } 5+t - 1+t - 8 = 0$$

$$\text{soit } 2t = 4 \rightarrow \boxed{t=2}$$

$$\text{on obtient donc le point H de coordonnées } \begin{cases} x_H = 5+2 = \boxed{7} \\ y_H = 1-2 = \boxed{-1} \\ z_H = \boxed{1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{c) on a } DH &= \sqrt{(x_H - x_D)^2 + (y_H - y_D)^2 + (z_H - z_D)^2} \\ &= \sqrt{(7-5)^2 + (-1-1)^2 + (1-1)^2} = \boxed{\sqrt{8}} = \boxed{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

4) a) si on prend le triangle ABC comme base de la pyramide, la hauteur correspondante sera justement [DH].

↳ le triangle ABC est rectangle en B $\rightarrow \text{Aire}_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2}$

$$\text{on a } \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow AB = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow BC = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\text{Donc on a } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{ABC} \times DH = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{2}$$

$$\text{et on obtient } V_{ABCD} = \frac{\sqrt{36}}{3} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$$

b) si on prend le triangle BCD comme base de la pyramide, la hauteur correspondante sera donnée par cette distance d_A entre le point A et le plan (BCD).

✓ c'est la valeur trouvée dans la question a)

$$\text{↳ on a } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{BCD} \times d_A = 2$$

$$\text{soit } \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{42}}{2} \times d_A = 2$$

$$\text{et on obtient } d_A = \boxed{\frac{12}{\sqrt{42}}} = \boxed{\frac{2\sqrt{42}}{7}}$$

Exercice 3

Partie A 1) on a $f_1(x) = \underbrace{x}_{u \times v} \underbrace{e^{1-x}}_{v^{-1}}$

et on obtient $f_1'(x) = \underbrace{1 \times e^{1-x}}_{u \times v} + \underbrace{x(-e^{1-x})}_{u \times v^{-1}} = e^{1-x}(1-x)$

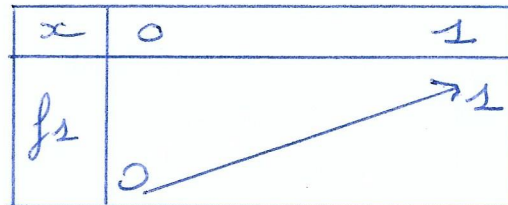
avec $e^{1-x} > 0$ pour tout x , et $1-x > 0$ pour $x \in [0; 1[$

$\hookrightarrow$ on a donc $f_1'(x) > 0$ sur $[0; 1[$

2) la fonction f_1 sera donc strictement croissante sur $[0; 1]$

on a $f_1(0) = 0 \times e^{1-0} = 0$

et $f_1(1) = 1 \times e^{1-1} = 1 \times e^0 = 1$



3) la fonction f_1 est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$.

on a $f_1(0) = \boxed{0}$ et $f_1(1) = \boxed{1}$

Donc le nombre 0, 1 appartient bien à l'intervalle image $[f_1(0); f_1(1)]$

et, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f_1(x) = 0, 1$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0; 1]$.

Partie B

1) a) on a $0 \leq x \leq 1$

soit $0 \times x^m \leq x \times x^m \leq 1 \times x^m$

soit $0 \leq x^{m+1} \leq x^m$

on multiplie par x^m qui est positif (conservation de l'ordre)

b) on sait que $0 \leq x^{m+1} \leq x^m$ pour $x \in [0; 1]$

soit $0 \leq x^{m+1} e^{1-x} \leq x^m e^{1-x}$ on multiplie par e^{1-x} qui est positif (conservation de l'ordre).

on obtient: $0 \leq \int_0^1 x^{m+1} e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^m e^{1-x} dx$

c'est à dire $0 \leq U_{n+1} \leq U_n$

c) La suite (U_n) est donc décroissante (car $U_{n+1} \leq U_n$)

et elle est minorée par 0 (car $U_n \geq 0$).

D'après le théorème de la convergence monotone, on sait que (U_n) est alors une suite convergente.

2) a) on utilise une intégration par parties.

$$\text{on a } U_{n+1} = \int_0^1 \underbrace{x^{n+1}}_u \underbrace{e^{1-x}}_{v'} dx = \left[\underbrace{x^{n+1}}_u \underbrace{(-e^{1-x})}_{v'} \right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{(n+1)x^n}_{u'} \underbrace{(-e^{1-x})}_v dx$$

$$\text{on obtient: } U_{n+1} = -e^0 + 0 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

$$\text{c'est à dire } \boxed{U_{n+1} = -1 + (n+1)U_n}$$

b) le script va démarrer à partir du terme U_1 et on veut qu'il renvoie la valeur de U_8 .
L'instruction "for n in range(1,...)" doit nous permettre de calculer les 7 termes de U_2 à U_8 .

on obtient: `from math import`
`def suite():` Python ne "connaît" pas $\square$.

c'est la particularité de l'instruction "range" qui s'arrêtera ici après 7 boucles

`u = exp(1) - 2`
`for n in range(1, 8)`
`u = (n+1)*u - 1`
`return u`

3) a) on part de $0 \leq x \leq 1$

$$\text{on obtient } 0 \leq 1-x \leq 1$$

$$\text{soit } \underbrace{e^0}_1 \leq e^{1-x} \leq \underbrace{e^1}_e \quad \text{par application de la fonction exp qui est croissante et qui conserve l'ordre.}$$

$$\text{on obtient } x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e x^n \quad (\text{car } x^n \text{ est ici positif}).$$

$$\text{soit } \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 e x^n dx$$

$$\text{c'est à dire } U_n \leq e \int_0^1 x^n dx \quad \text{avec } \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

donc on a bien

$$\boxed{U_n \leq \frac{e}{n+1}}$$

b) on sait aussi que $U_n \geq 0$ pour tout n .

$$\text{on a donc } 0 \leq U_n \leq \frac{e}{n+1} \quad \text{avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$$

et en appliquant le théorème des gendarmes,

$$\text{on obtient } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0}.$$

Exercice 4

AFFIRMATION 1 : on a ici une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.
↳ on factorise l'expression par x^2 .

$$\text{on obtient } f(x) = x^2 \left(\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 \right)$$

or, on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ (d'après les croissances comparées)

$$\text{donc on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 \right) = -1$$

et, par produit, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$

→ **VRAIE**

AFFIRMATION 2 : on se souvient que $(\cos x)' = -\sin x$
et $(\sin x)' = \cos x$.

$$\text{on a ici } f(x) = 2 \cos(x) - \sin(x)$$

$$\text{et on obtient } f'(x) = -2 \sin(x) - \cos(x)$$

↳ on calcule $-2f'(x) + 3f(x)$

$$= -2(-2 \sin(x) - \cos(x)) + 3(2 \cos(x) - \sin(x))$$

$$= 4 \sin(x) + 2 \cos(x) + 6 \cos(x) - 3 \sin(x)$$

$$= \sin(x) + 8 \cos(x)$$

on obtient bien le résultat attendu et la fonction f est bien une solution de (E) → **VRAIE**

AFFIRMATION 3 : après avoir calculé U_1 pour vérifier si on avait bien $U_1 < U_0$, on se lance dans un raisonnement par récurrence afin de montrer que $U_{n+1} < U_n$ pour tout n .

initialisation

$$\text{on a } U_1 = \ln(3 \times U_0 + 1) + 8$$

$$= \ln(3 \times 25 + 1) + 8 \approx 12,33$$

Donc on a bien $U_1 < U_0$ et la propriété est bien vérifiée au rang 0.

Hérédité

on suppose que $U_{n+1} < U_n$

$$\text{on obtient } 3U_{n+1} + 1 < 3U_n + 1$$

$$\text{puis } \ln(3U_{n+1} + 1) < \ln(3U_n + 1)$$

$$\text{soit } \ln(3U_{n+1} + 1) + 8 < \ln(3U_n + 1) + 8$$

$$\text{c'est à dire } U_{n+2} < U_{n+1}$$

la fonction $\ln$ est croissante et elle conserve l'ordre.

Donc, en supprimant la propriété vraie au rang n , elle reste vraie au rang $(n+1)$, et d'après le principe de récurrence, on a bien $U_{n+2} < U_n$ pour tout n .

Donc la suite (U_n) est bien décroissante $\rightarrow$ **VRAIE**

AFFIRMATION 4

on peut écrire la fonction h sous la forme $h(x) = ax + b$
on a donc $k(x) = x^4 + x^2 + ax + b$
soit $k'(x) = 4x^3 + 2x + a$
soit $k''(x) = 12x^2 + 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc la fonction k est bien convexe sur $\mathbb{R}$ (quelle que soit la fonction affine h) $\rightarrow$ **VRAIE**

AFFIRMATION 5

La réponse 120 est obtenue en considérant un arrangement de 5 lettres ($5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$)
MAIS il y a ici deux fois la même lettre et cela change le raisonnement!
on va commencer par placer les deux lettres E.

EE □□□	□EE□□	□□EE□	□□□EE
E□E□□	□E□E□	□□E□E	
E□□E□	□E□□E		
E□□□E			

cela fait donc **10** possibilités
et il reste à placer les trois lettres restantes, ce qui représente un arrangement de 3 éléments et on obtient $3! = 3 \times 2 \times 1 = \mathbf{6}$ possibilités

Donc on obtient $10 \times 6 = \mathbf{60}$ anagrammes $\rightarrow$ **FAUSSE**

on aurait pu aussi partir de cet arrangement de 5 lettres en divisant le résultat par 2 afin d'éliminer l'ordre qui n'existe pas entre les 2 lettres E $\rightarrow \frac{120}{2} = \mathbf{60}$.