

Exercice 2

2) on peut ici utiliser le produit scalaire en montrant que $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$ c'est à dire $[AB] \perp [BC]$.

$$\text{on a } \vec{AB} \begin{pmatrix} 5-4 \\ -3-(-4) \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{BC} \begin{pmatrix} 6-5 \\ -2-(-3) \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \text{on calcule } \vec{AB} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 1 \times 1 + (-2) \times 1 = \boxed{0}$$

Donc on a bien $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \rightarrow$ le triangle ABC est rectangle en B.

2) on peut se contenter ici de vérifier que les coordonnées des points A, B et C vérifient bien l'équation proposée.

$$\text{On a } x_A - y_A - z = 4 - (-4) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0 \rightarrow \boxed{\text{OK}}$$

$$x_B - y_B - z = 5 - (-3) - 8 = 5 + 3 - 8 = 0 \rightarrow \boxed{\text{OK}}$$

$$x_C - y_C - z = 6 - (-2) - 8 = 6 + 2 - 8 = 0 \rightarrow \boxed{\text{OK}}$$

Donc l'équation proposée correspond bien au plan (ABC).

3) a) La droite d sera dirigée par un vecteur colinéaire au vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ du plan (ABC).

$\hookrightarrow$ on va écrire la représentation paramétrique de la droite d avec le point D et le vecteur $\vec{n}$.

$$\text{on obtient } \begin{cases} x = 5 + 1 \times t \\ y = 1 + (-1) \times t \\ z = 1 + 0 \times t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{avec} \\ t \in \mathbb{R} \end{array}$$

point D vecteur $\vec{n}$

b) Ce point H correspond à l'intersection entre la droite d et le plan (ABC).

$$\text{On résout: } (5+t) - (1-t) - 8 = 0$$

$$\text{soit } 5+t - 1+t - 8 = 0$$

$$\text{soit } 2t = 4 \rightarrow \boxed{t=2}$$

$$\text{on obtient donc le point H de coordonnées } \begin{cases} x_H = 5+2 = \boxed{7} \\ y_H = 1-2 = \boxed{-1} \\ z_H = \boxed{1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{c) on a } DH &= \sqrt{(x_H - x_D)^2 + (y_H - y_D)^2 + (z_H - z_D)^2} \\ &= \sqrt{(7-5)^2 + (-1-1)^2 + (1-1)^2} = \boxed{\sqrt{8}} = \boxed{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

4) a) si on prend le triangle ABC comme base de la pyramide, la hauteur correspondante sera justement [DH].

↳ le triangle ABC est rectangle en B $\rightarrow \text{Aire}_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2}$

$$\text{on a } \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow AB = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow BC = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\text{Donc on a } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{ABC} \times DH = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{2}$$

$$\text{et on obtient } V_{ABCD} = \frac{\sqrt{36}}{3} = \frac{6}{3} = \boxed{2}$$

b) si on prend le triangle BCD comme base de la pyramide, la hauteur correspondante sera donnée par cette distance d_A entre le point A et le plan (BCD).

✓ c'est la valeur trouvée dans la question a)

$$\text{↳ on a } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}_{BCD} \times d_A = 2$$

$$\text{soit } \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{42}}{2} \times d_A = 2$$

$$\text{et on obtient } d_A = \boxed{\frac{12}{\sqrt{42}}} = \boxed{\frac{2\sqrt{42}}{7}}$$