

Exercice 1

AFFIRMATION 1

on peut remarquer que les 3 côtés du triangle HAC sont des diagonales de carrés ayant les mêmes dimensions. Ces trois côtés [AH], [HC] et [AC] ont donc une longueur égale (à $\sqrt{2}$ pour ceux qui veulent être précis). Le triangle HAC est donc équilatéral et il ne peut pas être rectangle du coup $\rightarrow$ **FAUSSE**

AFFIRMATION 2

Le plus simple, il me semble, est d'écrire les représentations paramétriques de chaque droite, puis de résoudre le système d'équations afin de voir si elles sont sécantes.

On a donc les coordonnées suivantes :

$$H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{HF} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{DI} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-1 \\ \frac{2}{3}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

on obtient pour la droite (HF) : $\begin{cases} x = 1 + 1 \times t \\ y = 0 + (-1) \times t \\ z = 1 + 0 \times t \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

(point F, vecteur HF)

et on obtient pour la droite (DI) : $\begin{cases} x = 0 + 1 \times t' \\ y = 1 + (-1) \times t' \\ z = 0 + \frac{2}{3} \times t' \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = t' \\ y = 1-t' \\ z = \frac{2}{3}t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$

(point D, vecteur DI)

on résout alors le système $\begin{cases} 1+t = t' \rightarrow t = t'-1 \\ -t = 1-t' \rightarrow t = t'-1 \\ 1 = \frac{2}{3}t' \rightarrow t' = \frac{3}{2} \end{cases}$

on a donc $t' = \frac{3}{2}$ et une même valeur $t = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

Donc le point d'intersection existe bien

et les droites (HF) et (DI) sont sécantes $\rightarrow$ **VRAIE**

$\rightarrow$ les coordonnées du point d'intersection sont $\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

AFFIRMATION 3

on commence par exprimer plus simplement le vecteur $\vec{u}$.

$$\hookrightarrow \text{on a } \sin(\pi - \alpha) = -(\sin(-\alpha)) = -(-\sin(\alpha)) = \sin \alpha$$

$$\text{et } \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\text{on a donc } \vec{u} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \sin \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix}$$

De plus, on a les coordonnées suivantes : $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Donc on a } \vec{AF} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on va étudier si le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires (c'est assez évident!) du plan (FAC).

$$\hookrightarrow \text{on calcule } \vec{AF} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \sin \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} = 1 \times \sin \alpha + 0 \times \sin \alpha + 1 \times (-\sin \alpha) = \sin \alpha - \sin \alpha = \boxed{0}$$

$$\text{et } \vec{AC} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \sin \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} = 1 \times \sin \alpha + 1 \times \sin \alpha + 0 \times (-\sin \alpha) = \sin \alpha + \sin \alpha = \boxed{2 \sin \alpha}$$

Donc $\vec{AC} \cdot \vec{u}$ n'est pas égal à zéro quelle que soit la valeur de α

Donc $\vec{u}$ n'est pas normal à (FAC) $\rightarrow$ **FAUSSE**

AFFIRMATION 4

c'est une "drôle" de question, qui peut être résolue en évitant tout raisonnement utilisant du dénombrement de Terminale.

En effet, il y a 7 segments qui partent du sommet A

$$\hookrightarrow [AB] [AC] [AD] [AE] [AF] [AG] [AH]$$

En enlevant le segment [BA] déjà compté, il y a ensuite 6 segments qui partent du sommet B.

$$\hookrightarrow \cancel{[BA]} [BC] [BD] [BE] [BF] [BG] [BH]$$

et donc 5 segments qui partent du sommet C

$$\hookrightarrow \cancel{[CA]} \cancel{[CB]} [CD] [CE] [CF] [CG] [CH]$$

déjà comptés

pour finalement obtenir un total égal à $7+6+5+4+3+2+1 = \boxed{28}$ segments.

$$\text{or, on a } N = \frac{8^2}{2} = \frac{64}{2} = \boxed{32} \neq 28$$

$\rightarrow$ **FAUSSE**

cela dit, on aurait pu aussi raisonner avec une combinaison de 2 points parmi un ensemble de 8 points sachant que les répétitions sont impossibles et que l'on ne tient pas compte de l'ordre $\hookrightarrow \binom{8}{2} = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28 \neq 32$.