Bac Spé Maths 2025
Voici la correction complète
du jour 2
pour le sujet Nouvelle-Calédonie
Vendredi 21 Novembre 2025

Correction proposée par

Bruno Swiners

www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

AFFIRMATION 1

on peut remarquer que les 3 côtés du triangle HAC sont des diagonales de carrés ayant les mêmes dimensions.
Ces trois côtés [AH], [HC] et [AC] ont donc une longueur égale (à $\sqrt{2}$ pour ceux qui veulent être précis).
Le triangle HAC est donc équilatéral et il ne peut pas être rectangle du coup → $\boxed{\text{FAUSSE}}$

AFFIRMATION 2

Le plus simple, il me semble, est d'écrire les représentations paramétriques de chaque droite, puis de résoudre le système d'équations afin de voir si elles sont sécantes.
On a donc les coordonnées suivantes :

$$H\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \rightarrow \vec{HF}\begin{pmatrix}1-0\\0-1\\1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad I\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{2}{3}\end{pmatrix} \rightarrow \vec{DI}\begin{pmatrix}1-0\\0-1\\\frac{2}{3}-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

on obtient pour la droite (HF) : $\begin{cases} x = \underbrace{1}_{\text{point } F} + \underbrace{1}_{\text{vecteur } \vec{HF}} \times t \\ y = 0 + (-1) \times t \\ z = 1 + 0 \times t \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

point F — vecteur $\vec{HF}$

et on obtient pour la droite (DI) $\begin{cases} x = 0 + 1 \times t' \\ y = 1 + (-1) \times t' \\ z = 0 + \frac{2}{3} \times t' \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = t' \\ y = 1-t' \\ z = \frac{2}{3}t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$

point D — vecteur $\vec{DI}$

on résout alors le système $\begin{cases} 1+t = t' \rightarrow t = t'-1 \\ -t = 1-t' \rightarrow t = t'-1 \\ 1 = \frac{2}{3}t' \rightarrow t' = \frac{3}{2} \end{cases}$

on a donc $t' = \frac{3}{2}$ et une même valeur $t = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

Donc le point d'intersection existe bien et les droites (HF) et (DI) sont sécantes → $\boxed{\text{VRAIE}}$

→ les coordonnées du point d'intersection sont $\begin{pmatrix}3/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}$

AFFIRMATION 3

on commence par exprimer plus simplement le vecteur $\vec{u}$.

↳ on a $\sin(\pi - \alpha) = -(\sin(-\alpha)) = -(-\sin(\alpha)) = \sin\alpha$

et $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

On a donc $\vec{u}\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ \sin\alpha\\ -\sin\alpha\end{pmatrix}$

De plus, on a les coordonnées suivantes : $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Donc on a $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1-0\\0-0\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

On va étudier si le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires (c'est assez évident !) du plan (FAC).

↳ on calcule $\overrightarrow{AF}.\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ \sin\alpha\\ -\sin\alpha\end{pmatrix} = 1\times\sin\alpha + 0\times\sin\alpha + 1\times(-\sin\alpha)$

$= \sin\alpha - \sin\alpha = \boxed{0}$

et $\overrightarrow{AC}.\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ \sin\alpha\\ -\sin\alpha\end{pmatrix} = 1\times\sin\alpha + 1\times\sin\alpha + 0\times(-\sin\alpha)$

$= \sin\alpha + \sin\alpha = \boxed{2\sin\alpha}$

Donc $\overrightarrow{AC}.\vec{u}$ n'est pas égal à zéro quelle que soit la valeur de α

Donc $\vec{u}$ n'est pas normal à (FAC) → $\boxed{\text{FAUSSE}}$

AFFIRMATION 4

c'est une "drôle" de question, qui peut être résolue en évitant tout raisonnement utilisant du dénombrement de Terminale.

En effet, il y a 7 segments qui partent du sommet A

↳ [AB] [AC] [AD] [AE] [AF] [AG] [AH]

En enlevant le segment [BA] déjà compté, il y a ensuite 6 segments qui partent du sommet B.

↳ ~~[BA]~~ [BC] [BD] [BE] [BF] [BG] [BH]

et donc 5 segments qui partent du sommet C

↳ ~~[CA]~~ ~~[CB]~~ [CD] [CE] [CF] [CG] [CH]

déjà comptés

pour finalement obtenir un total égal à $7+6+5+4+3+2+1$

$= \boxed{28}$ segments.

or, on a $N = \frac{8^2}{2} = \frac{64}{2} = \boxed{32} \neq 28$

→ $\boxed{\text{FAUSSE}}$

cela dit, on aurait pu aussi raisonner avec une combinaison de 2 points parmi un ensemble de 8 points sachant que les répétitions sont impossibles et que l'on ne tient pas compte de l'ordre → $\binom{8}{2} = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8\times7}{2} = 28 \neq 32$.

Exercice 2

Partie A

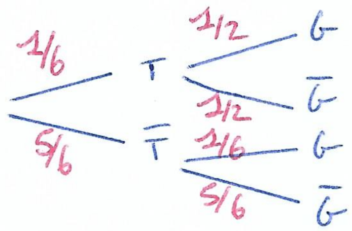
La zone 1 correspond à la moitié d'un carré de côté 1 et d'aire $1 \times 1 = 1$.
Donc l'aire de la zone 1 est égale à $\boxed{\frac{1}{2}}$.

La zone 2 correspond à une "aire sous la courbe" de la fonction $x \to x^2$.
Donc l'aire de la zone 2 est égale à $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$

La zone 3 correspond à la différence entre l'aire de la moitié du carré et de la zone 2 $\to$ on obtient $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$

Partie B

1) on a l'arbre suivant :



2) on utilise la formule des probabilités totales.

on a $p(G) = p(T \cap G) + p(\overline{T} \cap G)$
$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{5}{36} = \frac{8}{36} = \boxed{\frac{2}{9}}$

3) on cherche $P_G(T) = \frac{P(G \cap T)}{P(G)} = \frac{1/6 \times 1/2}{2/9} = \frac{1/12}{2/9} = \frac{9}{24} = \boxed{\frac{3}{8}}$

Partie C

1) a) on va commencer par réaliser le tableau qui correspond à la loi de probabilités de la variable X_1.
cette variable peut prendre les valeurs 1 ou 2 ou 3
et, par exemple, la probabilité qu'elle soit égale à 3 correspond à la probabilité d'atteindre la zone 3 soit $\frac{1}{6}$.
on obtient :

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

et on a $E(X_1) = \sum_i x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$
$= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6}$
$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{6} = \frac{10}{6} = \boxed{\frac{5}{3}}$

b) Pour la variance $V(X_1)$, on va utiliser la formule

$$V(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2$$

on obtient le tableau suivant pour X_1^2 :

	1^2	2^2	3^2
x_i^2	1	4	9
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

et on a $E(X_1^2) = \sum_i x_i^2 p_i = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3$

$$= 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{3} + 9 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{6} = \frac{20}{6} = \boxed{\frac{10}{3}}$$

On obtient donc $V(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2$

$$= \frac{10}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} - \frac{25}{9} = \boxed{\frac{5}{9}}$$

2) a) pour que l'on ait $Y = 9$, il faut que chacun des joueurs gagne 3 euros.

Donc on a $P(Y=9) = P(X_1 = 3 \overset{\text{(et)}}{\cap} X_2 = 3 \overset{\text{(et)}}{\cap} X_3 = 3)$

$$= P(X_1 = 3) \times P(X_2 = 3) \times P(X_3 = 3)$$

car les variables sont indépendantes.

On obtient $P(Y=9) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{216}}$

b) par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(Y) = E(X_1 + X_2 + X_3)$$

$$= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} = \frac{15}{3} = \boxed{5} \text{ euros.}$$

c) Les variables X_1, X_2 et X_3 étant indépendantes, on a :

$$V(Y) = V(X_1 + X_2 + X_3)$$

$$= V(X_1) + V(X_2) + V(X_3)$$

$$= \frac{5}{9} + \frac{5}{9} + \frac{5}{9} = \frac{15}{9} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

Exercice 3

1) on sait que $(\ln u)' = \frac{1}{u} \times u' = \frac{u'}{u}$ et $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)' = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$

↳ on a donc $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + 2} > 0$ car $e^{\frac{x}{2}} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

on a bien $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ → f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) on calcule $f(2\ln 2) = \ln\left(e^{\frac{2\ln 2}{\cancel{2}}} + 2\right) = \ln\left(\cancel{e}^{\ln 2} + 2\right) = \ln(4)$

on a donc $f(2\ln 2) = \ln(2^2) = 2\ln(2)$.

3) on calcule $U_1 = \ln\left(e^{\frac{u_0}{2}} + 2\right) = \ln\left(e^{\frac{\ln 9}{2}} + 2\right)$

or on sait que $\frac{\ln 9}{2} = \frac{1}{2}\ln 9 = \ln 9^{1/2} = \ln\sqrt{9} = \ln 3$

(on a $\sqrt{9} = 9^{1/2}$)

on a donc $U_1 = \ln\left(\cancel{e}^{\ln 3} + 2\right) = \ln(3+2) = \boxed{\ln(5)}$

4) <u>initialisation</u> on a $U_0 = \ln(9) \approx 2,197$

et $U_1 = \ln(5) \approx 1,609$

De plus, on a $2\ln(2) \approx 1,386$

Donc on a bien $2\ln(2) \leq U_1 \leq U_0$

↳ la propriété est bien vérifiée au rang 0.

<u>Hérédité</u>

on suppose que la propriété est vraie au rang n

↳ $2\ln(2) \leq U_{n+1} \leq U_n$

on applique la fonction f qui est croissante et qui conserve l'ordre :

on obtient $f(2\ln 2) \leq f(U_{n+1}) \leq f(U_n)$

soit $2\ln 2 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$

Donc la propriété reste vraie au rang $(n+1)$ et, d'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout n.

5) La suite (U_n) est donc décroissante (car $U_{n+1} \leq U_n$)

et minorée (car $2\ln 2 \leq U_n$).

D'après le théorème de la convergence monotone, on peut donc affirmer que la suite (U_n) converge.

6) a) on résout $X^2 - X - 2 = 0 \rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4\times1\times(-2) = 9 > 0$

Il y a donc 2 racines :

$X_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times1} = \boxed{-1}$ et $X_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times1} = \boxed{2}$

b) on veut résoudre l'équation $e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$

↳ en posant $X = e^{\frac{x}{2}}$, on a $X^2 = (e^{\frac{x}{2}})^2 = e^x$

et on obtient $X^2 - X - 2 = 0$

En utilisant les solutions de la question a), on a :

$X_1 = e^{\frac{x}{2}} = -1$, ce qui est impossible

$X_2 = e^{\frac{x}{2}} = 2 \rightarrow \frac{x}{2} = \ln 2 \rightarrow x = 2\ln 2$

on obtient donc $S = \{2\ln 2\}$

c) on résout $f(x) = x$ soit $\ln(e^{\frac{x}{2}}+2) = x$

soit $e^{\frac{x}{2}} + 2 = e^x$

c'est à dire $e^x - e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$

on retrouve la solution trouvée dans la question précédente $\rightarrow S = \{2\ln 2\}$

d) on a $V_{n+1} = f(V_n)$ avec f qui est continue sur $\mathbb{R}$ et la suite (V_n) qui est convergente.

En utilisant le théorème du point fixe, on sait que la limite l de (V_n) vérifiera l'équation $f(l) = l$.

Et, d'après la question précédente, on en déduit :

$\boxed{l = 2\ln 2}$

Exercice 4

1) en 0, on a $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

Par quotient, on a $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty$ et donc $\lim_{x\to 0} f(x) = \boxed{-\infty}$

Donc la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

en $+\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ (avec les croissances comparées)

et on a donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{1}$

Donc la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

2) on applique la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u(x) = \ln(x) \to u'(x) = \frac{1}{x}$

$v(x) = x^2 \to v'(x) = 2x$

on a donc $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - \ln(x)\times 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4}$

et on obtient $f'(x) = \frac{\cancel{x}(1-2\ln(x))}{x^{\cancel{4}\,3}} = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$

3) on a $x^3 > 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

$\to$ le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $(1-2\ln(x))$.

on résout $1-2\ln(x) = 0 \to \ln(x) = 1/2 \to x = e^{1/2}$

et on en déduit le tableau suivant :

x	0		$e^{1/2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}+1$	$\searrow$	1

on a $f(e^{1/2}) = \frac{\ln(e^{1/2})}{(e^{1/2})^2} + 1$

$\to f(e^{1/2}) = \frac{1}{2e} + 1$

4) a) L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[e^{1/2};+\infty[$

car on a $f(x) > 1$ sur cet intervalle.

mais, sur $]0;e^{1/2}]$, la fonction est continue et strictement décroissante

on a $\lim_{x\to 0} f(x) = \boxed{-\infty}$ et $f(e^{1/2}) = \frac{1}{2e} + 1 \approx \boxed{1{,}2}$

Le nombre 0 appartient bien à l'intervalle $]-\infty; \frac{1}{2e}+1]$

et, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$

possède une unique solution sur $]0;e^{1/2}]$ et donc sur $]0;+\infty[$.

b) Avec la calculatrice, on obtient $\boxed{0{,}65 < \alpha < 0{,}66}$

c) En reprenant les variations de f, on en déduit son signe.

x	0 α $e^{1/2}$ $+\infty$
variations de f	$-\infty$ ↗ 0 ↗ ↘ 1 ; $\boxed{-}$ $\boxed{+}$
signe de $f(x)$	$\boxed{-}$ 0 $\boxed{+}$

Donc f est négative sur $]0;\alpha]$ et positive sur $[\alpha;+\infty[$

5) a) on a les points $O\binom{0}{0}$ et $M\binom{x}{\ln x}$.

on a donc $OM = \sqrt{(x-0)^2+(\ln x - 0)^2} = \sqrt{x^2+(\ln x)^2}$

et on en déduit $OM^2 = \left(\sqrt{x^2+(\ln x)^2}\right)^2 = x^2+(\ln x)^2$

b) on va définir une fonction h à partir de la quantité OM^2.

↳ on a $h(x) = x^2+(\ln x)^2$

et on obtient $h'(x) = 2x + 2(\ln x)\times\frac{1}{x} = 2x\left(1+\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$

c'est à dire $h'(x) = 2x\,f(x)$

↳ $h'(x)$ est donc du signe de $f(x)$ et s'annulera en α.

on obtient le tableau suivant :

x	0 α $+\infty$
signe de $h'(x)$	$-$ 0 $+$
variations de h	↘ ↗

Donc la fonction h (ou la quantité OM^2) admet un minimum en α.

c) La valeur minimale de OM^2 est donc égale à $h(\alpha)$

c'est à dire $\alpha^2+(\ln(\alpha))^2$

Donc la valeur minimale de OM (c'est à dire d)

sera égale à $d = \sqrt{\alpha^2+(\ln(\alpha))^2} = \sqrt{\alpha^2+\ln^2(\alpha)}$