

Exercice 4

1) en 0, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Par quotient, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \boxed{-\infty}$

Donc la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

en $+\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ (avec les croissances comparées)

et on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \boxed{1}$

Donc la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$.

2) on applique la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\text{avec } u(x) = \ln(x) \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v(x) = x^2 \rightarrow v'(x) = 2x$$

$$\text{on a donc } f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4}$$

$$\text{et on obtient } f'(x) = \frac{x(1 - 2\ln(x))}{x^4} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

3) on a $x^3 > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

↳ le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $(1 - 2\ln(x))$.

$$\text{on résout } 1 - 2\ln(x) = 0 \rightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \rightarrow x = e^{1/2}$$

et on en déduit le tableau suivant:

x	0	$e^{1/2}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0	-
variations de f	$-\infty$	$\nearrow \frac{1}{2e} + 1$	$\searrow 1$

$$\text{on a } f(e^{1/2}) = \frac{\ln(e^{1/2})}{(e^{1/2})^2} + 1$$

$$\hookrightarrow f(e^{1/2}) = \frac{1}{2e} + 1$$

4) a) L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[e^{1/2}; +\infty[$ car on a $f(x) > 1$ sur cet intervalle.

mais, sur $]0; e^{1/2}]$, la fonction est continue et strictement décroissante.

$$\text{on a } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \boxed{-\infty} \text{ et } f(e^{1/2}) = \frac{1}{2e} + 1 \approx \boxed{1,2}$$

Le nombre 0 appartient bien à l'intervalle $]-\infty; \frac{1}{2e} + 1]$

et, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$

possède une unique solution sur $]0; e^{1/2}]$ et donc sur $]0; +\infty[$.

5) Avec la calculatrice, on obtient $\boxed{0,65 < x < 0,66}$

c) En reprenant les variations de f , on en déduit son signe.

x	0	α	$e^{2/2}$	$+\infty$
variations de f				
signe de $f(x)$	$-$	0	$+$	

Donc f est négative sur $]0; \alpha]$ et positive sur $[\alpha; +\infty[$

5) a) on a les points $O(0)$ et $M(\frac{x}{\ln x})$.

$$\text{on a donc } OM = \sqrt{(x-0)^2 + (\ln x - 0)^2} = \sqrt{x^2 + (\ln x)^2}$$

$$\text{et on en déduit } OM^2 = (\sqrt{x^2 + (\ln x)^2})^2 = x^2 + (\ln x)^2$$

b) on va définir une fonction h à partir de la quantité OM^2 .

$$\hookrightarrow \text{on a } h(x) = x^2 + (\ln x)^2$$

$$\text{et on obtient } h'(x) = 2x + 2(\ln x) \times \frac{1}{x} = 2x \left(1 + \frac{\ln(x)}{x^2} \right)$$

$$\text{c'est à dire } h'(x) = 2x f(x)$$

$\hookrightarrow h'(x)$ est donc du signe de $f(x)$ et s'annulera en α .

on obtient le tableau suivant:

x	0	α	$+\infty$
signe de $h'(x)$	$-$	0	$+$
variations de h			

Donc la fonction h (ou la quantité OM^2) admet un minimum en α .

c) La valeur minimale de OM^2 est donc égale à $h(\alpha)$

$$\text{c'est à dire } \alpha^2 + (\ln(\alpha))^2$$

Donc la valeur minimale de OM (c'est à dire d)

$$\text{sera égale à } d = \sqrt{\alpha^2 + (\ln(\alpha))^2} = \sqrt{\alpha^2 + \ln^2(\alpha)}$$