

Exercice 4

AFFIRMATION 1 : on a ici une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.
↳ on factorise l'expression par x^2 .

$$\text{on obtient } f(x) = x^2 \left(\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 \right)$$

or, on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ (d'après les croissances comparées)

$$\text{donc on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 \right) = -1$$

et, par produit, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$

→ **VRAIE**

AFFIRMATION 2 : on se souvient que $(\cos x)' = -\sin x$
et $(\sin x)' = \cos x$.

$$\text{on a ici } f(x) = 2 \cos(x) - \sin(x)$$

$$\text{et on obtient } f'(x) = -2 \sin(x) - \cos(x)$$

↳ on calcule $-2f'(x) + 3f(x)$

$$= -2(-2 \sin(x) - \cos(x)) + 3(2 \cos(x) - \sin(x))$$

$$= 4 \sin(x) + 2 \cos(x) + 6 \cos(x) - 3 \sin(x)$$

$$= \sin(x) + 8 \cos(x)$$

on obtient bien le résultat attendu et la fonction f est bien une solution de (E) → **VRAIE**

AFFIRMATION 3 : après avoir calculé U_1 pour vérifier si on avait bien $U_1 < U_0$, on se lance dans un raisonnement par récurrence afin de montrer que $U_{n+1} < U_n$ pour tout n .

initialisation

$$\text{on a } U_1 = \ln(3 \times U_0 + 1) + 8 \\ = \ln(3 \times 25 + 1) + 8 \approx 12,33$$

Donc on a bien $U_1 < U_0$ et la propriété est bien vérifiée au rang 0.

Hérédité

on suppose que $U_{n+1} < U_n$

$$\text{on obtient } 3U_{n+1} + 1 < 3U_n + 1$$

$$\text{puis } \ln(3U_{n+1} + 1) < \ln(3U_n + 1)$$

$$\text{soit } \ln(3U_{n+1} + 1) + 8 < \ln(3U_n + 1) + 8$$

$$\text{c'est à dire } U_{n+2} < U_{n+1}$$

la fonction $\ln$ est croissante et elle conserve l'ordre.

Donc, en supprimant la propriété vraie au rang n , elle reste vraie au rang $(n+1)$, et d'après le principe de récurrence, on a bien $U_{n+2} < U_n$ pour tout n .

Donc la suite (U_n) est bien décroissante $\rightarrow$ **VRAIE**

AFFIRMATION 4

on peut écrire la fonction h sous la forme $h(x) = ax + b$

on a donc $k(x) = x^4 + x^2 + ax + b$

soit $k'(x) = 4x^3 + 2x + a$

soit $k''(x) = 12x^2 + 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc la fonction k est bien convexe sur $\mathbb{R}$ (quelle que soit la fonction affine h) $\rightarrow$ **VRAIE**

AFFIRMATION 5

La réponse 120 est obtenue en considérant un arrangement de 5 lettres ($5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$)

MAIS il y a ici deux fois la même lettre et cela change le raisonnement !

on va commencer par placer les deux lettres E.

EE □□□	□EE□□	□□EE□	□□□EE
E□E□□	□E□E□	□□E□E	
E□□E□	□E□□E		
E□□□E			

cela fait donc **10** possibilités

et il reste à placer les trois lettres restantes, ce qui représente un arrangement de 3 éléments et on obtient $3! = 3 \times 2 \times 1 = \mathbf{6}$ possibilités

Donc on obtient $10 \times 6 = \mathbf{60}$ anagrammes $\rightarrow$ **FAUSSE**

on aurait pu aussi partir de cet arrangement de 5 lettres en divisant le résultat par 2 afin d'éliminer l'ordre qui n'existe pas entre les 2 lettres E $\rightarrow \frac{120}{2} = \mathbf{60}$.