Bac Spé Maths 2025

Voici la correction complète

du jour 1

pour le sujet Amérique du Sud

Jeudi 13 Novembre 2025

Correction proposée par

Bruno Swiners

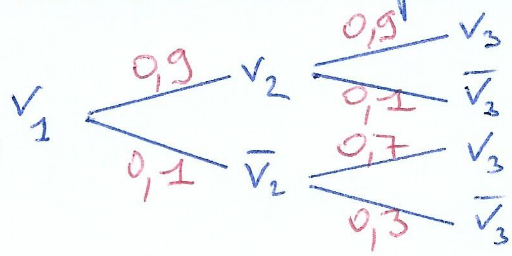
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

1) a) on a $p_1 = p(V_1) = 1$ donc on aura $p_2 = \boxed{0,9}$

b) on peut utiliser l'arbre pondéré suivant

événement certain avec $p(V_1) = 1$

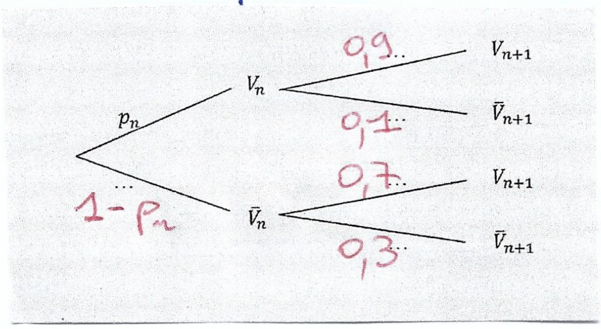


on utilise la formule des probabilités totales

$$p_3 = p(V_3) = p(V_3 \cap V_2) + p(V_3 \cap \overline{V_2})$$
$$= 0,9 \times 0,9 + 0,7 \times 0,1 = \boxed{0,88}$$

c) on cherche $p_{V_3}(\overline{V_2}) = \dfrac{p(V_3 \cap \overline{V_2})}{p(V_3)} = \dfrac{0,7 \times 0,1}{0,88} \approx \boxed{0,080}$

2) on obtient l'arbre pondéré suivant



3) on utilise, à nouveau, la formule des probabilités totales.

$$p_{n+1} = p(V_{n+1}) = p(V_{n+1} \cap V_n) + p(V_{n+1} \cap \overline{V_n})$$
$$= 0,9 \times p_n + 0,7 \times (1 - p_n)$$
$$= 0,9 p_n + 0,7 - 0,7 p_n$$

soit $\quad p_{n+1} = 0,2 p_n + 0,7$

4) a) Avant l'instruction " for ... in range ... ", la liste affichera déjà le terme initial 1.
Il reste donc $(n-1)$ termes à afficher afin d'avoir n termes, et on sait que l'instruction " for k in range(1,n) " ne permet que d'aller jusqu'au terme de rang $(n-1)$
→ on va donc choisir le programme $\boxed{1}$
(car on affiche la valeur de p une fois qu'elle vient d'être calculée).

b) Le programme va afficher les cinq premiers termes de la suite (que l'on obtient avec sa calculatrice)
↳ [1 , 0.9 , 0.88 , 0.876 , 0.8752]

5) on a ici une démonstration très classique à faire.

initialisation on sait que $p_1 = \boxed{1}$

et on calcule $p_1 = 0{,}125 \times 0{,}2^{1-1} + 0{,}875$

$= 0{,}125 \times \underbrace{0{,}2^0}_{=1} + 0{,}875 = \boxed{1}$

↳ la propriété est bien vérifiée au rang 1.

Hérédité

on suppose la propriété vraie au rang n, soit $p_n = 0{,}125 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}875$
et montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$, c'est à dire

$p_{n+1} = 0{,}125 \times 0{,}2^{n} + 0{,}875$.

or, on sait que $p_{n+1} = 0{,}2\, p_n + 0{,}7$

et donc $p_{n+1} = 0{,}2(0{,}125 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}875) + 0{,}7$

$= 0{,}125 \times 0{,}2^{1} \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}2 \times 0{,}875 + 0{,}7$

$= 0{,}125 \times 0{,}2^{n} + 0{,}175 + 0{,}7$

on obtient bien $p_{n+1} = 0{,}125 \times 0{,}2^{n} + 0{,}875$

et, d'après le principe de récurrence, la propriété est bien vraie pour $n \geq 1$.

6) on a $-1 < 0{,}2 < 1$ → $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2^{n-1} = 0$

Donc on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}125 \times 0{,}2^{n-1} = 0$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \boxed{0{,}875}$

Exercice 2

AFFIRMATION 1

chaque joueur de la première équipe peut échanger une poignée de main avec chacun des joueurs de la deuxième équipe.

↳ cela donne un total de poignées de main égal

à $22 \times 25 = \boxed{550} \neq 47$ → $\boxed{\text{FAUSSE}}$

AFFIRMATION 2

L'énoncé est ici très SURPRENANT !

Entre les trois premiers, l'ordre n'a aucune importance.

On a donc ici une combinaison de 3 éléments pris parmi un total de 18 éléments

↳ on calcule $\binom{18}{3} = \dfrac{18!}{15!\,3!} = \boxed{816} \neq 4896$ → $\boxed{\text{FAUSSE}}$

AFFIRMATION 3

Si Jacques est premier alors il reste 6 possibilités pour la 2^e place et 5 possibilités pour la 3^e place

soit un total ici de $6 \times 5 = 30$ possibilités.

Et on peut faire le même raisonnement si Jacques finit 2^e ou s'il finit 3^e, soit un total de $3 \times 30 = \boxed{90}$ → $\boxed{\text{VRAIE}}$

les places de Jacques

les places pour les autres.

AFFIRMATION 4

Pour obtenir $Y = 4$, il y a plusieurs possibilités !

$X_1 = 2$ et $X_2 = 2$ $\boxed{\text{ou}}$ $X_1 = -1$ et $X_2 = 5$ $\boxed{\text{ou}}$ $X_1 = 5$ et $X_2 = -1$

soit $P(Y=4) = P(X_1 = 2 \cap X_2 = 2) + P(X_1 = -1 \cap X_2 = 5) + P(X_1 = 5 \cap X_2 = -1)$

$= 0{,}3 \times 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}4$

$= \boxed{0{,}25}$ → $\boxed{\text{VRAIE}}$

on a, par exemple, $P(X_1 = 2 \cap X_2 = 2)$ $= P(X_1 = 2) \times P(X_2 = 2)$ car les variables sont INDÉPENDANTES

AFFIRMATION 5

on cherche $P_{X \geq 15}(X \geq 18) = \dfrac{P(X \geq 15 \cap X \geq 18)}{P(X \geq 15)} = \dfrac{P(X \geq 18)}{P(X \geq 15)}$

attention à bien comprendre ce résultat !

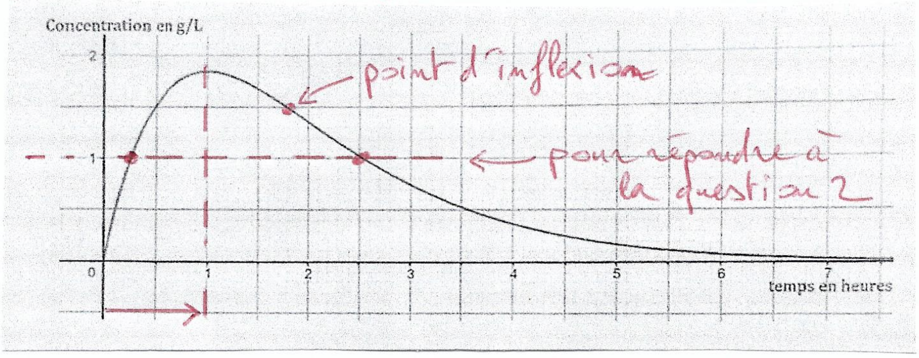
$\approx \dfrac{0{,}4048963}{0{,}932692}$

$\approx \boxed{0{,}434}$ → $\boxed{\text{VRAIE}}$

c'est la formule classique $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Exercice 3

Partie A on aura ci dessous les éléments graphiques qui fournissent les réponses.



1) il faudra 1h pour atteindre la concentration maximale.
2) on aura $f(t) \geq 1$ pour $t \in [0,25 ; 2,5]$
3) La fonction semble concave sur $[0 ; 1,75]$ et convexe sur $[1,75 ; 8]$ avec un point d'inflexion en 1,75.

Partie B

1) on résout $y' + y = 0$ soit $y' = -y$
et, en appliquant le cours, on a $y(t) = Ae^{-t}$, avec $A \in \mathbb{R}$.

2) on a $u(t) = \underbrace{at}_{f} \underbrace{e^{-t}}_{g}$ soit $u'(t) = \underbrace{a}_{f'} \times \underbrace{e^{-t}}_{g} + \underbrace{at}_{f} \times \underbrace{(-e^{-t})}_{g'}$

on veut $u'(t) + u(t) = 5e^{-t}$
c'est à dire $ae^{-t} - \cancel{ate^{-t}} + \cancel{ate^{-t}} = 5e^{-t} \rightarrow ae^{-t} = 5e^{-t} \rightarrow \boxed{a = 5}$

3) La fonction u de la question précédente est donc une solution particulière de (E).
Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) sera :

$$\underbrace{Ae^{-t}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}} + \underbrace{u(t)}_{\text{solution particulière de l'équation (E)}} = Ae^{-t} + 5te^{-t}, \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

4) on souhaite $f(0) = 0$
soit $A\underbrace{e^{-0}}_{=1} + \underbrace{5 \times 0 \times e^{-0}}_{=0} = 0 \rightarrow \boxed{A = 0}$
Donc on aura $\boxed{f(t) = 5te^{-t}}$

Partie C

1) on a $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$ et, avec les croissances comparées, on a
$\lim\limits_{t \to +\infty} te^{-t} = 0 \rightarrow$ et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

et donc, à terme, la concentration se rapprochera de zéro.

2) on a $f(t) = \underbrace{5t}_{u}\,\underbrace{e^{-t}}_{v} \longrightarrow f'(t) = \underbrace{5\,e^{-t}}_{u'\times v} + \underbrace{5t\times(-e^{-t})}_{u\times v'} = e^{-t}(5-5t)$

Donc, le signe de $f'(t)$ ne dépend que du signe de $(5-5t)$ car on a $e^{-t} > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

↳ on résout $5-5t=0$

$-5t=-5$

$t = \frac{-5}{-5} = 1$

t	0		1		$+\infty$
signe de $f'(t)$		$+$	0	$-$	
variations de f	0	↗	$5e^{-1} \approx 1{,}8$	↘	0

on a $f(0)=0$ → on a $f(1) = 5\times 1\times e^{-1} = 5e^{-1}$

3) La fonction f est strictement croissante et continue sur $[0;1]$

On a $f(0) = \boxed{0}$ et $f(1) = \boxed{5e^{-1}} \approx 1{,}8$

Donc le nombre 1 appartient bien à l'intervalle $[0; 5e^{-1}]$

et, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(t)=1$

a une unique solution sur $[0;1]$ → on a $\boxed{0{,}25 < t_1 < 0{,}26}$

La fonction f est strictement décroissante et continue sur $[1;+\infty[$

On a $f(1) = \boxed{5e^{-1}} \approx 1{,}8$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \boxed{0}$

Donc le nombre 1 appartient bien à l'intervalle $[0; 5e^{-1}]$

et, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(t)=1$

a une unique solution sur $[1;+\infty[$ → on a $\boxed{2{,}54 < t_2 < 2{,}55}$

4) on va prendre ici l'intervalle maximal possible

soit $2{,}55\,h - 0{,}25\,h = \boxed{2{,}3\,h}$

$0{,}3\times 60$ min !

qui correspond à $\boxed{2h\ 18min}$

Partie D

on calcule $T_m = \int_0^1 \underbrace{5t}_{u}\,\underbrace{e^{-t}}_{v'}\,dt = \Big[\underbrace{5t}_{u}\,\underbrace{(-e^{-t})}_{v}\Big]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{5}_{u'}\,\underbrace{(-e^{-t})}_{v}\,dt$

on fait une intégration par parties

avec $u(t) = 5t \rightsquigarrow u'(t) = 5$

$v'(t) = e^{-t} \rightsquigarrow v(t) = -e^{-t}$

On obtient $T_m = (-5e^{-1} + 0) + 5\int_0^1 e^{-t}\,dt = -5e^{-1} + 5\Big[-e^{-t}\Big]_0^1$

soit $T_m = -5e^{-1} + 5\big(-e^{-1} - (-\underbrace{e^{-0}}_{=1})\big)$

$= -5e^{-1} - 5e^{-1} + 5 = \boxed{-10e^{-1} + 5}$

$\approx \boxed{1{,}32\,h}$

Exercice 4

1) Si on considère le point $C\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}-0\\ \frac{3}{2}-0\\ 0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{3}{2}\\ -1\end{pmatrix}$,

on obtient pour (CK) la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = 0 + \frac{3}{2}t \\ z = 1 + (-1)t \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{3}{2}t \\ z = 1-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

point C   vecteur $\overrightarrow{CK}$

2) on a $OM(t) = \sqrt{(x_M-x_O)^2+(y_M-y_O)^2+(z_M-z_O)^2}$ avec $M(t) \in (CK)$

donc $OM(t) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-0\right)^2+\left(\frac{3}{2}t-0\right)^2+(1-t-0)^2}$

$= \sqrt{\frac{3}{4}t^2+\frac{9}{4}t^2+1-2t+t^2} = \sqrt{4t^2-2t+1}$

3) a) on a $f(t) = \sqrt{4t^2-2t+1} \rightarrow f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{4^2-2t+1}} \times (8t-2)$

Donc le signe de $f'(t)$ ne dépend que du signe de $(8t-2)$.

On en déduit le tableau suivant :

on résout $8t-2=0$

$\hookrightarrow t = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

t	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
signes de $f'(t)$		$-$	0	$+$	
variations de f		↘		↗	

b) Le minimum de f est donc atteint en $\frac{1}{4}$ (et il est égal à $f\left(\frac{1}{4}\right)$).

4) on sait que le projeté orthogonal du point O sur (CK) correspond au point de la droite (CK) pour lequel la distance entre le point O et ce projeté est minimale.

Donc le point H est le point de (CK) pour lequel $t = \frac{1}{4}$.

On obtient donc $H\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{4}\\ \frac{3}{2}\times\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4}+1\end{pmatrix} \rightarrow H\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{8}\\ \frac{3}{8}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$

5) on va montrer que $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ en calculant un produit scalaire qui sera donc nul.

On a $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{8}-2\sqrt{3}\\ \frac{3}{8}-0\\ \frac{3}{4}-0\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0-0\\ 0-2\\ 1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{15\sqrt{3}}{8}\\ \frac{3}{8}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = -\frac{15\sqrt{3}}{8}\times 0 + \frac{3}{8}\times(-2) + \frac{3}{4}\times 1 = \boxed{0}$ donc $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$

On montrerait de même que $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ et $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

Donc on a aussi $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$.

Le point H est bien l'intersection des trois hauteurs du triangle

↳ H est donc l'orthocentre du triangle ABC.

6) a) on sait déjà, d'après la question 4), que $(OH)\perp(CK)$

Donc il reste à montrer que (OH) est orthogonale à une 2e droite du plan (ABC), par exemple (AB) sachant que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont bien non colinéaires.

⚠ on aurait pu aussi directement montrer que $\overrightarrow{OH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$, deux vecteurs non colinéaires de (ABC).

on calcule $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{8}-0\\ \frac38-0\\ \frac34-0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0-2\sqrt3\\ 2-0\\ 0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{8}\\ \frac38\\ \frac34\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\sqrt3\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$

↳ $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{\sqrt3}{8}\times(-2\sqrt3)+\frac38\times2+\frac34\times0=\boxed{0}$

on a donc $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ et on sait que $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{CK}$

Donc (OH) est bien orthogonale au plan (ABC).

b) Le vecteur $\overrightarrow{OH}$ représente donc un vecteur normal de (ABC).

↳ ses coordonnées correspondent aux coefficients a, b et c de l'équation cartésienne du plan (ABC).

on a $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{8}\\ \frac38\\ \frac34\end{pmatrix}$ et le plan (ABC) aura pour équation :

$\frac{\sqrt3}{8}x+\frac38y+\frac34z+d=0$

↳ on utilise, par exemple, le point B qui appartient au plan (ABC) ↳ $\frac{\sqrt3}{8}\times\underset{x_B}{0}+\frac38\times\underset{y_B}{2}+\frac34\times\underset{z_B}{0}+d=0\ \rightarrow d=-\frac34$

Donc on aura pour le plan (ABC) : $\frac{\sqrt3}{8}x+\frac38y+\frac34z-\frac34=0$

ou $\sqrt3x+3y+6z-6=0$

7) on sait que $\overrightarrow{CK}\perp\overrightarrow{AB}$ donc, en prenant $[AB]$ comme base,

on aura $Aire_{ABC}=\frac{CK\times AB}{2}$

avec $CK=\sqrt{\left(\frac{\sqrt3}{2}-0\right)^2+\left(\frac32-0\right)^2+(0-1)^2}=\sqrt4=2$

$AB=\sqrt{(0-2\sqrt3)^2+(2-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{16}=4$

Donc $Aire_{ABC}=\frac{2\times4}{2}=\boxed{4}$ u.a.