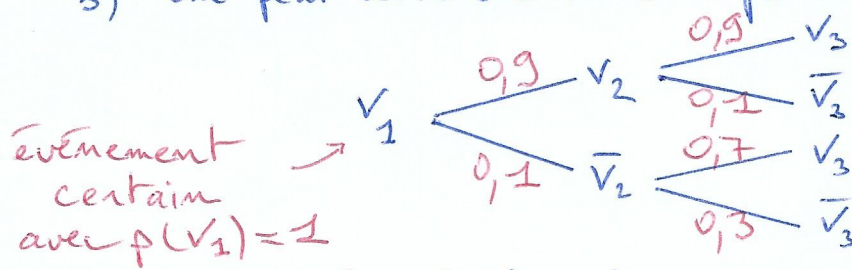


Exercice 1

1) a) on a $p_1 = p(V_1) = 1$ donc on aura $p_2 = \boxed{0,9}$

b) on peut utiliser l'arbre pondéré suivant

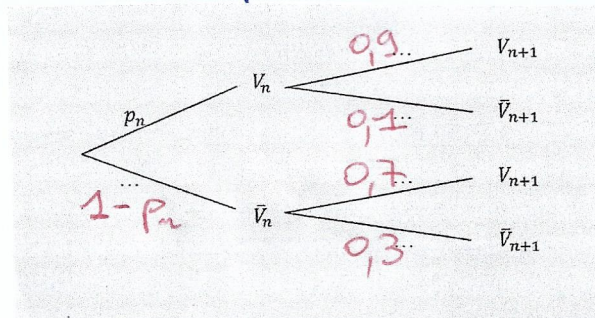


on utilise la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} p_3 = p(V_3) &= p(V_3 \cap V_2) + p(V_3 \cap \bar{V}_2) \\ &= 0,9 \times 0,9 + 0,7 \times 0,1 = \boxed{0,88} \end{aligned}$$

c) on cherche $p_{V_3}(\bar{V}_2) = \frac{p(V_3 \cap \bar{V}_2)}{p(V_3)} = \frac{0,7 \times 0,1}{0,88} \approx \boxed{0,080}$

2) on obtient l'arbre pondéré suivant



3) on utilise, à nouveau, la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned} p_{n+1} = p(V_{n+1}) &= p(V_{n+1} \cap V_n) + p(V_{n+1} \cap \bar{V}_n) \\ &= 0,9 \times p_n + 0,7 \times (1 - p_n) \\ &= 0,9 p_n + 0,7 - 0,7 p_n \end{aligned}$$

soit $p_{n+1} = 0,2 p_n + 0,7$

4) a) Avant l'instruction "for ... in range ...", la liste affichera déjà le terme initial 1.

Il reste donc $(n-1)$ termes à afficher afin d'avoir n termes, et on sait que l'instruction "for k in range(1, n)" ne permet que d'aller jusqu'au terme de rang $(n-1)$.

→ on va donc choisir le programme $\boxed{1}$ (car on affiche la valeur de p une fois qu'elle vient d'être calculée).

b) Le programme va afficher les cinq premiers termes de la suite (que l'on obtient avec sa calculatrice)

$$\hookrightarrow [1, 0,9, 0,88, 0,876, 0,8752]$$

5) on a ici une démonstration très classique à faire.

initialisation on sait que $p_1 = \boxed{1}$

$$\text{et on calcule } p_1 = 0,125 \times 0,2^{1-1} + 0,875 \\ = 0,125 \times \underline{0,2^0} + 0,875 = \boxed{1}$$

$\underline{=1}$

↳ la propriété est bien vérifiée au rang 1.

Hérédité

On suppose la propriété vraie au rang n , soit $p_n = 0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875$
et montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$, c'est à dire
 $p_{n+1} = 0,125 \times 0,2^n + 0,875$.

or, on sait que $p_{n+1} = 0,2 p_n + 0,7$

$$\text{et donc } p_{n+1} = 0,2 (0,125 \times 0,2^{n-1} + 0,875) + 0,7 \\ = 0,125 \times 0,2 \times 0,2^{n-1} + 0,2 \times 0,875 + 0,7 \\ = 0,125 \times 0,2^n + 0,175 + 0,7$$

on obtient bien $p_{n+1} = 0,125 \times 0,2^n + 0,875$

et, d'après le principe de récurrence, la propriété est
bien vraie pour $n \geq 1$.

6) on a $-1 < 0,2 < 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^{n-1} = 0$

Donc on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,125 \times 0,2^{n-1} = 0$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \boxed{0,875}$