

Exercice 4

Partie A 1) Le tirage est sans remise. Il y a donc 60 choix pour le premier nombre et 59 choix pour le deuxième choix.
Il y a donc $60 \times 59 = \boxed{3540}$ couples possibles.

2) on veut que le discriminant Δ soit strictement positif (> 0).
c'est à dire $(2)^2 - 4 \times a \times c > 0$ soit $4ac < 4$ ou $\boxed{ac < 1}$

3) L'événement $\bar{\Pi}$ va signifier que $ac \geq 1$
→ il faut donc que "a" et "c" aient le même signe.
On peut prendre n'importe laquelle des 30 valeurs positives possibles pour "a", que l'on associe à l'une des 29 valeurs positives restantes → cela donne $30 \times 29 = 870$ choix.
On a un raisonnement similaire pour les valeurs négatives et cela donne un total de $870 + 870 = \boxed{1740}$ issues.

4) L'événement Π est l'événement contraire de $\bar{\Pi}$.
Il comporte donc $3540 - 1740 = 1800$ issues
et on obtient une probabilité égale à $\frac{1800}{\text{nombre total d'issues}} \approx \boxed{0,51}$
→ 3540

Partie B

1) on a $y' + 10y = 0 \rightarrow y' = -10y$
et, en appliquant directement le cours, on obtient
 $y = \boxed{Ae^{-10x}}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

2) on a $f(x) = (6x^2 + 2x - 2)e^{-5x+1}$

$$\text{on calcule } f'(x) = \underbrace{(12x+2)}_u \times \underbrace{e^{-5x+1}}_v + \underbrace{(6x^2+2x-2)}_u \times \underbrace{(-5e^{-5x+1})}_{v'}$$
$$= e^{-5x+1} (12x+2 - 30x^2 - 10x + 10)$$
$$= e^{-5x+1} (-30x^2 + 2x + 12)$$

$$\text{on a donc } f'(x) + 10f(x) = e^{-5x+1} (-30x^2 + 2x + 12) + 10(6x^2 + 2x - 2)e^{-5x+1}$$
$$= e^{-5x+1} (-30x^2 + 2x + 12 + 60x^2 + 20x - 20)$$
$$= e^{-5x+1} (30x^2 + 22x - 8)$$

et donc f est bien une solution particulière de (E). c'est bien le résultat attendu.

3) Les solutions de l'équation (E) s'écrivent :

$$\underbrace{Ae^{-10x}}_{\text{solution de l'équation homogène}} + \underbrace{(6x^2 + 2x - 2)e^{-5x+1}}_{\text{solution particulière de (E)}}, \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

Partie C

1) en $-\infty$, on a une forme indéterminée par $6x^2 + 2x - 2$

→ on factorise et on a $6x^2 + 2x - 2 = x^2(6 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2})$

on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (6 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}) = 6$

et, par produit, avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2(6 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}) = \boxed{+\infty}$

De plus, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x + 1 = +\infty$. donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-5x+1} = \boxed{+\infty}$

Donc, par produit, on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

2) on résout $f(x) = 0 \Leftrightarrow (6x^2 + 2x - 2) e^{-5x+1} = 0$
 $\neq 0$ pour tout x !

Donc on résout $6x^2 + 2x - 2 = 0$

On utilise alors la partie A avec $a = 6$ et $c = -2$

on a donc $ac = 6 \times (-2) = -12 < 1 \rightarrow$ c'est l'événement M.

Donc il y a 2 solutions, qui donneront 2 points.

3) L'énoncé parle d'utiliser la partie B, cela ne me paraît pas le plus pertinent !!

on a $f(x) = (6x^2 + 2x - 2) e^{-5x+1}$

Donc on a $f'(x) = (12x + 2) e^{-5x+1} + (6x^2 + 2x - 2)(-5e^{-5x+1})$

$$= e^{-5x+1} (12x + 2 - 30x^2 - 10x + 10)$$

$$= e^{-5x+1} (-30x^2 + 2x + 12)$$

Une tangente horizontale correspond à $f'(x) = 0$

c'est à dire ici à $-30x^2 + 2x + 12 = 0$

on utilise alors la partie A avec $a = -30$ et $c = 12$

on a donc $ac = -30 \times 12 = -360 < 1 \rightarrow$ c'est l'événement M.

Donc il y a 2 solutions, qui correspondent à 2 tangentes horizontales.

4) Le signe de $f(x)$ ne dépend que du signe de $(-30x^2 + 2x + 12)$ car on a $e^{-5x+1} > 0$ pour tout x .

on calcule $\Delta = (2)^2 - 4 \times (-30) \times 12 = 1444 > 0$

$$\hookrightarrow 2 \text{ racines : } x_1 = \frac{-2 - \sqrt{1444}}{2 \times (-30)} = \frac{-2 - 38}{-60} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{1444}}{2 \times (-30)} = \frac{-2 + 38}{-60} = \boxed{-0,6}$$

on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-0,6$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0
variations de f				

- 5) sur l'intervalle $[-0,6; +\infty[$, le maximum de la fonction est égal à $f(\frac{2}{3}) \approx 0,19 \rightarrow$ aucune solution sur cet intervalle pour $f(x) = 1$.
 sur l'intervalle $] -\infty; -0,6]$, la fonction est strictement décroissante et continue.
 on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $f(-0,6) \approx -56,78$
 et on a donc bien $1 \in [f(-0,6); +\infty[$.
 donc, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 1$ possède une unique solution sur $] -\infty; -0,6]$, et donc aussi sur $\mathbb{R}$.

6) a) on a $F(x) = (-\frac{6}{5}x^2 - \frac{22}{25}x + \frac{28}{125})e^{-5x+1}$
 et on calcule $F'(x) = (-\frac{12}{5}x - \frac{22}{25})e^{-5x+1} + (-\frac{6}{5}x^2 - \frac{22}{25}x + \frac{28}{125})(-5e^{-5x+1})$
 $= e^{-5x+1}(-\frac{12}{5}x - \frac{22}{25} + 6x^2 + \frac{22}{5}x - \frac{28}{25})$
 $= e^{-5x+1}(6x^2 + 2x - 2)$

donc on a bien $F'(x) = f(x)$ pour tout x .

donc la fonction F est bien une primitive de la fonction f .

b) on a donc $I_m = \int_{0,2}^m f(x)dx = F(m) - F(0,2)$

avec $F(0,2) = 0$

on a donc $I_m = (-\frac{6}{5}m^2 - \frac{22}{25}m + \frac{28}{125})e^{-5 \times 0,2 + 1} = e^0 = 1$

on veut résoudre $I_m = 0$ soit $-\frac{6}{5}m^2 - \frac{22}{25}m + \frac{28}{125} = 0$

$\hookrightarrow$ on calcule $\Delta = (-\frac{22}{25})^2 - 4 \times (-\frac{6}{5}) \times (\frac{28}{125}) = \frac{1156}{625} > 0$

donc on a 2 racines (avec $\sqrt{\Delta} = \frac{34}{25}$)

$x_1 = \frac{\frac{22}{25} - \frac{34}{25}}{2 \times (-\frac{6}{5})} = -\frac{14}{15}$ et $x_2 = \frac{\frac{22}{25} + \frac{34}{25}}{2 \times (-\frac{6}{5})} = 0,2$

donc, pour $m > 0,2$, il n'y aura pas de solutions pour $I_m = 0$.
 Et l'aire algébrique sous la courbe de f ne s'annulera pas entre les droites verticales d'équations $x = 0,2$ et $x = m (> 0,2)$.