

Exercice 3

1) on a $\sqrt{1} = \ln(-1 + 2e^{\sqrt{0}}) = \ln(-1 + 2e^{\ln(4)}) = \ln(-1 + 2 \times 4) = \boxed{\ln 7}$
et $w_0 = -1 + e^{\sqrt{0}} = -1 + e^{\ln(4)} = -1 + 4 = \boxed{3}$

2) a) c'est la formule 2 qu'il faut choisir car il faut le signe $\equiv$ et que la valeur dans la cellule B3 se calcule à partir de la cellule B2.

b) D'après la feuille de calcul, la suite (v_n) semble être croissante.

c) initialisation on a $\sqrt{0} = \ln(4)$ et $\sqrt{1} = \ln(7)$

donc on a bien $\sqrt{1} > \sqrt{0}$.

Hérédité on suppose que l'on a $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$

on a donc $e^{\sqrt{n+1}} > e^{\sqrt{n}}$ *application d'une fonction croissante qui conserve l'ordre*

$$\text{et donc on a } 2e^{\sqrt{n+1}} > 2e^{\sqrt{n}}$$

$$\text{soit } -1 + 2e^{\sqrt{n+1}} > -1 + 2e^{\sqrt{n}}$$

$$\text{on obtient } \ln(-1 + 2e^{\sqrt{n+1}}) > \ln(-1 + 2e^{\sqrt{n}})$$

$$\text{c'est à dire } \sqrt{n+2} > \sqrt{n+1}$$

à nouveau, on applique une fonction croissante!

donc, d'après le principe de récurrence, on aura bien, pour tout n , $\sqrt{n+1} > \sqrt{n} \rightarrow$ la suite $(\sqrt{n})$ est donc croissante.

3) a) on calcule $w_{n+1} = -1 + e^{\sqrt{n+1}}$
 $= -1 + e^{\ln(-1 + 2e^{\sqrt{n}})}$
 $= -1 - 1 + 2e^{\sqrt{n}}$
 $= -2 + 2e^{\sqrt{n}}$
 $= 2(-1 + e^{\sqrt{n}}) = 2w_n$

$$\text{donc on a } w_{n+1} = 2w_n$$

$\hookrightarrow$ la suite (w_n) est donc géométrique de raison 2 et de premier terme $w_0 = 3$.

b) on applique la formule des suites géométriques

$$w_n = w_0 \times q^{(n-0)}$$

$$= 3 \times 2^n$$

$$\boxed{w_n = 3 \times 2^n}$$

et on sait que $W_n = -1 + e^{V_n}$

on a donc $e^{V_n} = W_n + 1$

soit ~~$\ln(e^{V_n})$~~ $= \ln(W_n + 1)$

on obtient $V_n = \ln(W_n + 1)$
 $= \ln(3 \times 2^n + 1)$.

c) on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ si $q > 1$

Donc, ici, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 3 \times 2^n) = +\infty$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + 3 \times 2^n) = +\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$

4) L'algorithme fera des boucles tant que les termes de la suite sont inférieurs à la valeur de S donnée et il s'arrêtera dès que ces termes vont dépasser cette valeur de S , afin d'afficher le rang du premier terme qui dépassera S .

Cela sera toujours possible car on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$, avec (V_n) croissante, et donc pour tout nombre S , on aura le rang n d'un premier terme qui dépasse S .