

Exercice 4

1) Si on considère le point $C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{CK} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \\ \frac{3}{2} - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$,

on obtient pour (CK) la représentation paramétrique suivante:

$$\begin{cases} x = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = 0 + \frac{3}{2}t \\ z = 1 + (-1)t \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{3}{2}t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

point C vecteur CK

2) on a $ON(t) = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 + (z_n - z_0)^2}$ avec $N(t) \in (CK)$

$$\begin{aligned} \text{donc } ON(t) &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{2}t - 0\right)^2 + (1 - t - 0)^2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}t^2 + \frac{9}{4}t^2 + 1 - 2t + t^2} = \sqrt{4t^2 - 2t + 1} \end{aligned}$$

3) a) on a $f(t) = \sqrt{4t^2 - 2t + 1} \rightarrow f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{4t^2 - 2t + 1}} \times (8t - 2)$

Donc le signe de $f'(t)$ ne dépend que du signe de $(8t - 2)$.

On en déduit le tableau suivant:

on résout $8t - 2 = 0$

$$\hookrightarrow t = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

t	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
signes de $f'(t)$	-	0	+
variations de f			

b) Le minimum de f est donc atteint en $\frac{1}{4}$ (et il est égal à $f(\frac{1}{4})$).

4) on sait que le projeté orthogonal du point O sur (CK) correspond au point de la droite (CK) pour lequel la distance entre le point O et ce projeté est minimale. Donc le point H est le point de (CK) pour lequel $t = \frac{1}{4}$.

$$\text{On obtient donc } H \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} + 1 \end{pmatrix} \rightarrow H \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

5) on va montrer que $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ en calculant un produit scalaire qui sera donc nul.

$$\text{on a } \overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{8} - 0 \\ \frac{3}{8} - 0 \\ \frac{3}{4} - 0 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 2 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{15\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{15\sqrt{3}}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times (-2) + \frac{3}{4} \times 1 = \boxed{0} \quad \text{donc } \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$$

On montrerait de même que $\vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0$ et $\vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0$
 Donc on a aussi $\vec{BH} \perp \vec{AC}$ et $\vec{CH} \perp \vec{AB}$.

Le point H est bien l'intersection des trois hauteurs du triangle.
 ↳ H est donc l'orthocentre du triangle ABC.

6) a) on sait déjà, d'après la question 4), que $(OH) \perp (CK)$
 Donc il reste à montrer que (OH) est orthogonale à une
 2^e droite du plan (ABC) , par exemple (AB) sachant que
 les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CK}$ sont bien non colinéaires.

⚠ on aurait pu aussi directement montrer que $\vec{OH}$ est
 orthogonal à $\vec{AB}$ et à $\vec{AC}$, deux vecteurs non colinéaires de (ABC) .

$$\text{on calcule } \vec{OH} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 - 2\sqrt{3} \\ 2 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \vec{OH} \cdot \vec{AB} = \frac{\sqrt{3}}{8} \times (-2\sqrt{3}) + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{3}{4} \times 0 = \boxed{0}$$

on a donc $\vec{OH} \perp \vec{AB}$ et on sait que $\vec{OH} \perp \vec{CK}$

Donc (OH) est bien orthogonale au plan (ABC) .

b) Le vecteur $\vec{OH}$ représente donc un vecteur normal de (ABC) .

↳ ses coordonnées correspondent aux coefficients a, b etc
 de l'équation cartésienne du plan (ABC) .

$$\text{on a } \vec{OH} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ et le plan } (ABC) \text{ aura pour équation : } \frac{\sqrt{3}}{8}x + \frac{3}{8}y + \frac{3}{4}z + d = 0$$

↳ on utilise, par exemple, le point B qui appartient au
 plan (ABC) $\hookrightarrow \frac{\sqrt{3}}{8}x_B + \frac{3}{8}y_B + \frac{3}{4}z_B + d = 0 \rightarrow d = -\frac{3}{4}$

$$\text{Donc on aura pour le plan } (ABC) : \frac{\sqrt{3}}{8}x + \frac{3}{8}y + \frac{3}{4}z - \frac{3}{4} = 0$$

$$\text{ou } \sqrt{3}x + 3y + 6z - 6 = 0$$

7) on sait que $\vec{CK} \perp \vec{AB}$ donc, en prenant $[\vec{AB}]$ comme base,
 on aura $\text{Aire}_{ABC} = \frac{\vec{CK} \times \vec{AB}}{2}$

$$\text{avec } CK = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 0\right)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$AB = \sqrt{(0 - 2\sqrt{3})^2 + (2 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{Donc } \text{Aire}_{ABC} = \frac{2 \times 4}{2} = \boxed{4} \text{ u.a.}$$