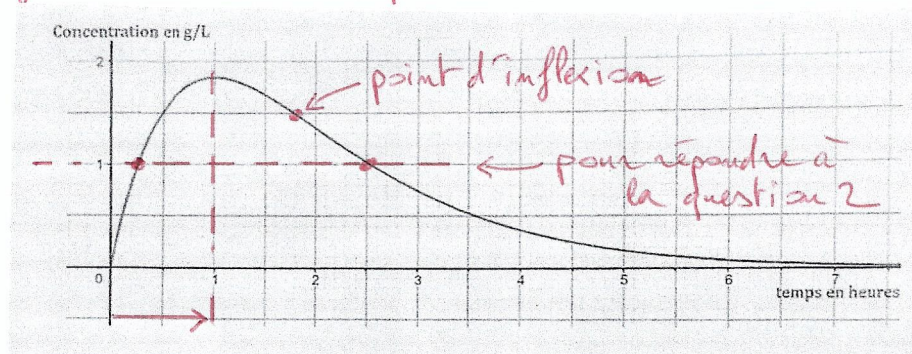


Exercice 3

Partie A

on aura ci dessous les éléments graphiques qui fournissent les réponses.



- 1) il faudra 1h pour atteindre la concentration maximale.
- 2) on aura $f(t) \geq 1$ pour $t \in [0,25; 2,5]$
- 3) la fonction semble concave sur $[0; 1,75]$ et convexe sur $[1,75; 3]$ avec un point d'inflexion en 1,75.

Partie B

- 1) on résout $y' + y = 0$ soit $y' = -y$
et, en appliquant le cours, on a $y(t) = Ae^{-t}$, avec $A \in \mathbb{R}$.
- 2) on a $u(t) = \underbrace{at}_{f \times g} e^{-t}$ soit $u'(t) = \underbrace{a \times e^{-t}}_{f' \times g} + \underbrace{at \times (-e^{-t})}_{f \times g'}$

on veut $u'(t) + u(t) = 5e^{-t}$
c'est à dire $\cancel{ae^{-t}} - \cancel{ate^{-t}} + \cancel{ate^{-t}} = 5e^{-t} \rightarrow ae^{-t} = 5e^{-t} \rightarrow \boxed{a=5}$

- 3) La fonction u de la question précédente est donc une solution particulière de (E).

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) sera:

$$\underbrace{Ae^{-t}}_{\text{solution générale de l'équation homogène}} + \underbrace{u(t)}_{\text{solution particulière de l'équation (E)}} = Ae^{-t} + 5te^{-t}, \text{ avec } A \in \mathbb{R}$$

- 4) on souhaite $f(0) = 0$

$$\text{soit } \underbrace{Ae^{-0}}_{=1} + 5 \times \underbrace{0 \times e^{-0}}_{=0} = 0 \rightarrow \boxed{A=0}$$

$$\text{Donc on aura } \boxed{f(t) = 5te^{-t}}$$

Partie C

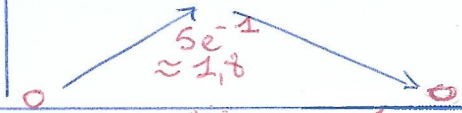
- 1) on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$ et, avec les croissances comparées, on a
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-t} = 0 \rightarrow$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

et donc, à terme, la concentration se rapprochera de zéro.

$$2) \text{ on a } f(t) = \underbrace{5t}_{u'} \underbrace{e^{-t}}_{v'} \rightarrow f'(t) = \underbrace{5}_{u' \times v'} \underbrace{e^{-t}}_{v'} + \underbrace{5t}_{u \times v'} \underbrace{(-e^{-t})}_{v'} = e^{-t}(5 - 5t)$$

Donc, le signe de $f'(t)$ ne dépend que du signe de $(5 - 5t)$ car on a $e^{-t} > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \text{on résout } 5 - 5t &= 0 \\ -5t &= -5 \\ t &= \frac{-5}{-5} = 1 \end{aligned}$$

t	0	1	$+\infty$
signe de $f'(t)$	+	0	-
variations de f			

$$\text{on a } f(0) = 0 \rightarrow$$

$$\text{on a } f(1) = 5 \times 1 \times e^{-1} = 5e^{-1}$$

3) La fonction f est strictement croissante et continue sur $[0; 1]$

$$\text{on a } f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 5e^{-1} \approx 1,8$$

Donc le nombre 1 appartient bien à l'intervalle $[0; 5e^{-1}]$ et, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(t) = 1$ a une unique solution sur $[0; 1]$ $\rightarrow$ on a $0,25 < t_1 < 0,26$

La fonction f est strictement décroissante et continue sur $[1; +\infty[$

$$\text{on a } f(1) = 5e^{-1} \approx 1,8 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$$

Donc le nombre 1 appartient bien à l'intervalle $[0; 5e^{-1}]$ et, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(t) = 1$ a une unique solution sur $[1; +\infty[$ $\rightarrow$ on a $2,54 < t_2 < 2,55$

4) on va prendre ici l'intervalle maximal possible

$$\text{soit } 2,55h - 0,25h = 2,3h$$

$$\text{qui correspond à } 2h 18min$$

$$0,3 \times 60 min!$$

Partie D

$$\text{on calcule } T_m = \int_0^1 \underbrace{5t}_{u'} \underbrace{e^{-t}}_{v'} dt = \left[\underbrace{5t}_{u} \underbrace{(-e^{-t})}_{v'} \right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{5}_{u'} \underbrace{(-e^{-t})}_{v'} dt$$

on fait une intégration par parties

$$\text{avec } u(t) = 5t \rightarrow u'(t) = 5$$

$$v'(t) = e^{-t} \rightarrow v(t) = -e^{-t}$$

$$\text{on obtient } T_m = (-5e^{-1} + 0) + 5 \int_0^1 e^{-t} dt = -5e^{-1} + 5 \left[-e^{-t} \right]_0^1$$

$$\text{soit } T_m = -5e^{-1} + 5(-e^{-1} - (-e^{-0}))$$

$$= -5e^{-1} - 5e^{-1} + 5 = -10e^{-1} + 5$$

$$\approx 1,32h$$